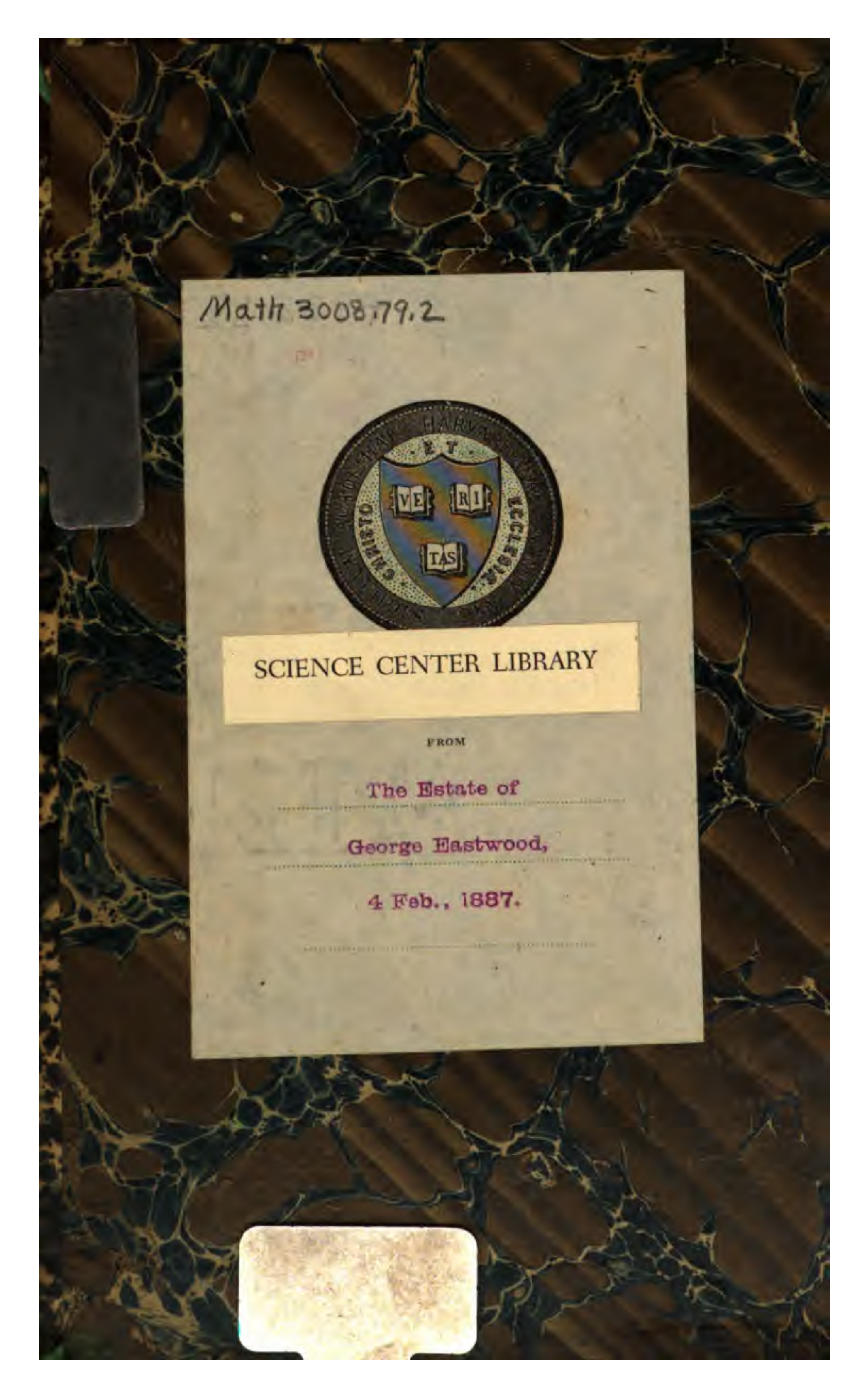
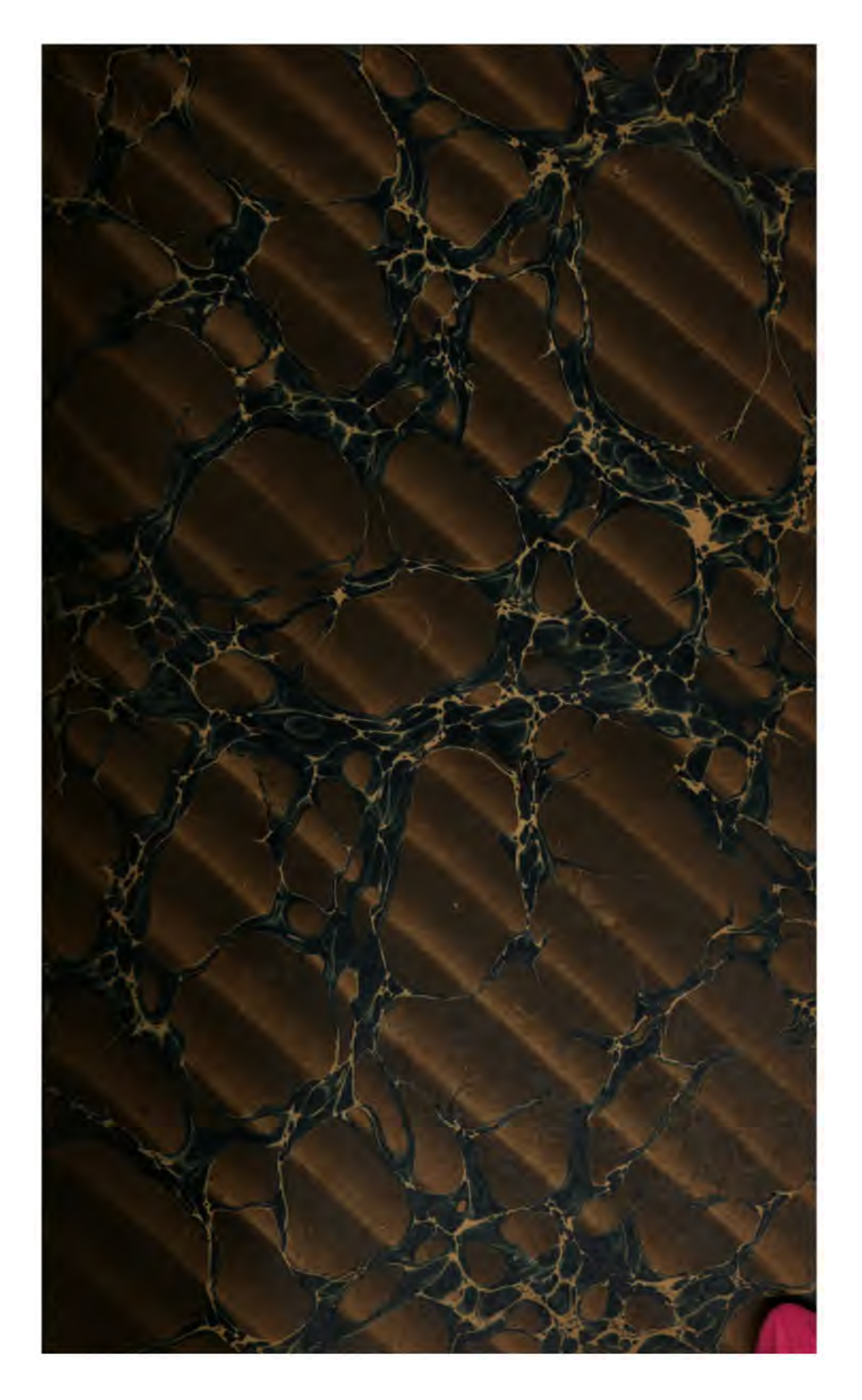

VE
RI
TAS



COURS D'ANALYSE

DE

L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

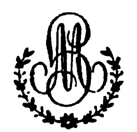
COURS
D'ANALYSE
DE
L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE;

PAR
(Charles)
EUGÈNE CATALAN,

Ancien élève de l'École polytechnique; docteur ès sciences; professeur d'analyse à l'Université de Liége; associé de l'Académie de Belgique, de l'Académie des sciences de Toulouse et de la Société des sciences de Lille; membre de la Société mathématique et de la Société philomatique de Paris; correspondant de l'Institut national génevois, de la Société havraise d'études diverses et de la Société d'agriculture de la Marne.

SECONDE ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

ALGÈBRE. — CALCUL DIFFÉRENTIEL. —
1re PARTIE DU CALCUL INTÉGRAL.



LIÉGE. ÉMILE DECQ, rue de la Régence. | PARIS. GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins.

BRUXELLES,
F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

1879

From
the Estate of
George Eastwood,
4 Feb., 1887.

ALGÈBRE.

I.

SÉRIES ET LOGARITHMES.

CHAPITRE I.

NOTIONS SUR LES SÉRIES.

Préliminaires.

1. On appelle *série* une suite indéfinie de termes procédant suivant une loi déterminée.

D'après cette définition, l'on doit toujours pouvoir *calculer un terme de rang donné,* soit directement, soit au moyen de ceux qui le précèdent (*). Autrement dit, si les termes d'une série sont désignés par

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots\ u_n,\ \ldots\ldots$$

le *terme général* u_n est *fonction* de n.

(*) Par exemple, le vingt-neuvième terme de la progression

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots\ldots$$

peut être obtenu, soit *directement*, au moyen de la formule $u_n = 3 + 4(n-1)$, soit par des additions successives.

2. *Diverses espèces de séries.* — Désignons par S_n la *somme des* n *premiers termes* d'une série; savoir :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n.$$

Cette somme, aussi bien que u_n, est une fonction de n. Cela posé, il peut se présenter trois cas :

1° *Si la somme* S_n des n premiers termes *tend vers une limite finie et déterminée* S, lorsque le nombre n croît indéfiniment, la série est dite *convergente;*

2° Dans le cas contraire, c'est-à-dire *quand la somme* S_n *peut croître* (en valeur absolue) *au delà de toute limite,* on dit que la série est *divergente;*

3° Enfin, *s'il arrive que la somme* S_n, sans croître au delà de toute limite, *n'ait pas de limite déterminée,* la série n'est *ni convergente ni divergente :* on lui donne le nom de *série indéterminée* (*).

Par conséquent : 1° *une progression par quotient, illimitée et décroissante*, est une *série convergente;* 2° *une progression par quotient, illimitée et croissante,* est une *série divergente;* 3° *la progression*

$$+1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ \ldots,$$

dont le terme général est $(-1)^{n-1}$, constitue une *série indéterminée;* car S_n égale 1 ou 0, suivant que n est *impair* ou *pair.*

Les séries convergentes sont les seules qu'il soit utile de

(*) La plupart des auteurs font rentrer cette troisième espèce de série dans la catégorie des *séries divergentes.* Cette classification nous paraît contraire à l'étymologie et à la signification habituelle du mot *divergent.* La dénomination de *série indéterminée* a été proposée par M. L. Olivier. (*Journal de Crelle,* t. II.)

considérer (*). En conséquence, nous allons indiquer quelques-uns des caractères au moyen desquels on peut, *dans certains cas*, reconnaître qu'une série proposée est ou n'est pas convergente.

(*) Il y a plus; les expressions : *limite d'une série, somme d'une série, reste d'une série*, n'ont aucun sens lorsque la série n'est pas convergente. On peut donc s'étonner que de savants géomètres aient énoncé les propositions suivantes :

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$ (Lacroix, *Calcul intégral*, t. III, p. 346);

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots = \frac{1}{4}$ (*Ibid.*);

$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \ldots = 0{,}403\,628\,36$ (*Ibid.*, p. 390);

$\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cos 4\varphi + \cdots = \frac{1}{2}$ (Poisson, *Journal de l'École polytechnique*, t. XI, p. 313);

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{2}{3}$ (Prehn, *J. de Crelle*, t. XLI);

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots = 0$ (Simonof, *Mémoire sur les séries des nombres aux puissances harmoniques*);

etc.

A propos de la première formule, on peut faire les remarques suivantes :

x étant une fraction proprement dite, on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots;$$

et, par le changement de x en $-x$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^{n-1} \mp \cdots$$

Ainsi, x *étant moindre que l'unité, la somme* S_n, *des* n *premiers termes du second membre, a pour limite* $\frac{1}{1+x}$.

Mais, si l'on suppose $x = 1$, la série devient

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots:$$

la *somme* S_n, alternativement égale à 1 et à 0, *ne tend vers aucune limite*; et, en conséquence, la formule dont il s'agit est absurde.

Laplace rapporte (*Introduction à la théorie des Probabilités*) que le

Théorèmes sur la convergence.

8. THÉORÈME I. — *Dans toute série convergente, le terme général a pour limite zéro.*

Désignons par S la limite vers laquelle tend la somme S_n des n premiers termes, et par R_n le *reste* de la série; en sorte que

$$S_n + R_n = S.$$

Changeant n en $n - 1$, nous aurons

$$S_{n-1} + R_{n-1} = S.$$

On conclut, de ces deux équations,

$$S_n - S_{n-1} + R_n - R_{n-1} = 0,$$

ou

$$u_n + R_n - R_{n-1} = 0.$$

Dans cette égalité, faisons croître indéfiniment la variable n : par hypothèse, chacun des termes R_n, R_{n-1} tend vers zéro; donc

$$\lim u_n = 0 \text{ (*)}.$$

P. *Grandi* en avait conclu la possibilité de la Création! Ces rêveries étaient excusables dans le siècle dernier. Aujourd'hui, les auteurs qui admettent l'équation

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

ne possèdent pas les premières notions de l'Analyse.

(*) Il est bon d'observer, à propos de cette proposition fondamentale, que *la convergence ne dépend pas des premiers termes* : la série

$$1 - \frac{10}{1} + \frac{10^2}{1.2} - \frac{10^3}{1.2.3} + \cdots\cdots$$

dont les termes, abstraction faite du signe, vont d'abord en augmentant, est convergente.

4. Théorème II. — *Dans toute série convergente, la somme d'un nombre quelconque, mais déterminé, de termes consécutifs a pour limite zéro.*

Conservant les notations du numéro précédent, représentons par S_{n+p} la somme des $n+p$ premiers termes; nous aurons

$$S_n + R_n = S, \quad S_{n+p} + R_{n+p} = S.$$

Ces deux équations donnent

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots + u_{n+p} + R_{n+p} - R_n = 0;$$

puis, si le nombre n croît indéfiniment,

$$\lim (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots + u_{n+p}) = 0.$$

5. *Remarques.* — I. L'énoncé et la démonstration du dernier théorème supposent que *le nombre* p *des termes consécutifs est constant :* il peut, d'ailleurs, être aussi grand qu'on le veut (*).

II. Les théorèmes précédents expriment deux conditions auxquelles satisfont toutes les séries convergentes. Conséquemment, *toute série qui n'y satisfait pas ne saurait être convergente.*

Ajoutons que ces deux conditions, *nécessaires,* sont loin d'être *suffisantes :* on verra bientôt qu'une série dont tous les termes, supposés de même signe, décroissent indéfiniment, peut être divergente.

III. Le second théorème est une conséquence du premier; car *si des quantités, en nombre limité, tendent cha-*

(*) Moyennant une certaine condition, *le nombre* p *peut être variable et indéfiniment croissant.* (Voir plus loin, p. 7.)

cune vers zéro, leur somme a pour limite zéro (*). Il résulte de là que *si les termes d'une série, convergente ou divergente, ont pour limite zéro, on en peut toujours trouver* p *consécutifs dont la somme soit inférieure à un nombre donné* δ.

En effet, pour satisfaire à l'inégalité

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots + u_{n+p} < \delta,$$

dans laquelle tous les termes sont supposés positifs, il suffit de rendre chacune des parties du premier membre moindre que $\frac{\delta}{p}$ (**).

IV. Il y a cette différence entre les séries convergentes et les séries divergentes, que, *dans toute série convergente, la somme de* p *termes consécutifs tend vers une limite, quand le nombre* p *augmente indéfiniment*, et que, *dans les séries divergentes, cette somme croît indéfiniment avec* p, *quel que soit le rang du premier des termes considérés.* Ces deux

(*) Si ce nombre augmentait indéfiniment, la proposition pourrait être en défaut. Soit l'identité

$$1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{n},$$

dans laquelle n désigne le nombre des parties de l'unité. Appliquant le théorème énoncé, on est conduit à cette absurdité :

$$1 = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots$$

(**) Dans la plupart des cas, les termes de la série vont en décroissant, du moins à partir de l'un d'eux. S'il en est ainsi, l'inégalité ci-dessus sera vérifiée dès que l'on aura :

$$u_{n+1} < \frac{\delta}{p}.$$

Exemple :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+p} < \delta.$$

Cette condition est remplie dès que $n + 1$ surpasse $\frac{p}{\delta}$.

propriétés, que l'on pourrait regarder comme évidentes, résultent très-simplement des principes précédents.

En effet, si la série est convergente, on a (4)

$$S_{n+p} - S_n + R_{n+p} - R_n = 0;$$

puis, en supposant n *constant* et p *variable*,

$$\lim (S_{n+p} - S_n) - R_n = 0,$$

ou

$$\lim (S_{n+p} - S_n) = S - S_n.$$

Au contraire, la série étant divergente, la somme S_{n+p} peut dépasser toute limite; et il en est évidemment de même pour $(S_{n+p} - S_n)$ (*).

6. Théorème III. — *Dans toute série convergente, la somme d'un nombre indéfiniment grand* (**) *de termes consécutifs tend vers zéro, lorsque le rang du premier de ces termes augmente indéfiniment.*

Dans l'équation

$$(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots + u_{n+p}) + R_{n+p} - R_n = 0,$$

supposons que p soit une fonction de n, qui devienne infinie avec cette variable. Nous aurons, *en passant à la limite*,

$$\lim (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots + u_{n+p}) = 0;$$

comme dans le cas où p était supposé constant (4).

7. *Remarque.* — Cette proposition, beaucoup plus générale que le Théorème II, n'exprime pourtant pas une propriété qui appartienne exclusivement aux séries convergentes : *la somme d'un nombre indéfiniment grand de termes consécutifs peut avoir pour limite zéro, sans que la série soit convergente* (***).

(*) Toujours en supposant n constant.

(**) *Indéfiniment grand* signifie ici : *qui croît indéfiniment.*

(***) Voir p. 13.

8. Théorème IV. — *Si les termes d'une série sont, en valeur absolue, respectivement moindres que ceux d'une série convergente dont tous les termes ont même signe, la première série est convergente.*

Décomposons la somme S_n des n premiers termes de la série convergente en deux parties a_n, b_n; a_n représentant l'ensemble des termes correspondant aux termes positifs de la première série, et b_n la somme de ceux qui correspondent aux termes négatifs de celle-ci. Désignons par S'_n, a'_n, b'_n les quantités analogues, relatives à la première série. Nous aurons

$$S'_n = a'_n - b'_n, \quad S_n = a_n + b_n.$$

La seconde série étant convergente, les *sommes positives croissantes* a_n, b_n ont des limites α, β; donc les *sommes positives croissantes* a'_n, b'_n, *respectivement moindres que les premières*, ont des limites α', β'; et la somme S'_n a pareillement une limite, égale à $\alpha' - \beta'$.

9. *Remarques.* — I. Il est visible que le même théorème subsiste si les termes de la première série sont égaux à ceux de la seconde, respectivement multipliés par des quantités positives ou négatives quelconques, mais *finies*.

II. Si la série convergente donnée n'avait pas ses termes de même signe, la proposition pourrait être en défaut : en effet, la différence $a_n - b_n$ peut avoir une limite, bien que les sommes a_n, b_n croissent indéfiniment (*).

(*) Par exemple, ainsi qu'on le verra plus loin, la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots\cdots$$

est *convergente*, et la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots$$

est *divergente*.

10. *Applications.* — I. *La série*

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}+\cdots\cdots,$$

dont les termes, à partir du quatrième, sont respectivement moindres que ceux de la progression

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}+\cdots\cdots,$$

est convergente.

II. *La série*

$$1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots\pm\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\mp\cdots\cdots$$

est convergente.

III. *La série*

$$1+\frac{a+c}{b+c}+\frac{(a+c)(2a+c)}{(b+c)(2b+c)}+\cdots\cdots+\frac{(a+c)\ldots(\overline{n-1}a+c)}{(b+c)\ldots(\overline{n-1}b+c)}+\cdots\cdots,$$

dans laquelle a, b, c *sont des quantités positives, est convergente si* a *est inférieure à* b. *Dans le cas contraire, elle est divergente.*

En effet, dans le premier cas, les termes sont, à partir du troisième, respectivement moindres que ceux de la progression décroissante

$$1+\frac{a+c}{b+c}+\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^n+\cdots\cdots \text{(*)};$$

etc.

(*) A cause de

$$\frac{na+c}{nb+c}<\frac{a+c}{b+c}.$$

De la série harmonique.

11. Cette série a pour termes les inverses des nombres naturels, c'est-à-dire

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ldots$$

On lui donne le nom de *série harmonique*, parce que trois termes consécutifs quelconques, ou, plus généralement, trois termes équidistants quelconques sont en *proportion harmonique* (*).

Il est facile de prouver que cette série, dont les termes diminuent indéfiniment, est divergente. En effet, groupons-les, à partir du troisième, de la manière suivante :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},\quad \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16},\ \ldots$$

. . . .

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k};$$

(*) *Trois nombres* a, b, c, *sont en proportion harmonique, quand l'excès du premier sur le deuxième, est à l'excès du deuxième sur le troisième, comme le premier est au troisième;* c'est-à-dire lorsque

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}.$$

Il est aisé de reconnaître que les fractions $\frac{1}{n-k}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+k}$ satisfont à cette relation.

La dénomination de *proportion harmonique* se rattache à un phénomène d'acoustique: quand on veut faire rendre à une corde les sons composant l'*accord parfait majeur*, on fait vibrer la corde entière, puis les $\frac{4}{5}$, puis les $\frac{2}{3}$ de la corde. Or

$$\frac{1-\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}.$$

nous aurons

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{4},\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8},\ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{2^{k-1}}{2^k};$$

ou bien

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2},\ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{1}{2}.$$

Donc, en supposant $n=2^k$:

$$S_n>1+\frac{k}{2}.$$

L'expression $\frac{k}{2}$ pouvant croître au delà de toute limite, il en est de même, à plus forte raison, pour S_n (*).

12. La série dont nous nous occupons est excessivement *peu divergente;* c'est-à-dire que la somme S_n croît très-lentement avec n. Pour le faire voir, groupons ainsi les 2^k premiers termes :

$$1,\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3},\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7},\ldots,$$

$$\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k-1},\quad \frac{1}{2^k};$$

(*) On peut encore employer la démonstration suivante :

Évidemment,

$$S_{2n}=S_n+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

La somme entre parenthèses surpasse $\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$. Donc le *reste* (s'il y en avait un), serait toujours supérieur à $\frac{1}{2}$; et, contrairement à la définition (2), il ne tendrait pas vers zéro.

nous aurons

$$S_n < 1 + \frac{2}{2} + \frac{4}{4} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k},$$

ou

$$S_n < k + \frac{1}{2^k};$$

et même, dès que l'exposant k surpasse 2 (*),

$$S_n < k.$$

Ainsi, *la somme des* n *premiers termes de la série harmonique est inférieure à l'exposant de la puissance de* 2 *égale à* n.

Si, par exemple, $k = 12$, on aura $n = 4\,096$,

$$S_{4\,096} < 12,$$

et, en même temps,

$$S_{4\,096} < 7;$$

de sorte que la somme des 4 096 premiers termes est comprise entre 7 et 12 (**).

De même, $k = 20$, ou $n = 1\,048\,576$, donne

$$11 < S_n < 20.$$

13. *Remarque.* — Il est facile de vérifier l'*identité*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n}. \quad \text{(A)}$$

Le second membre représente la somme des $2n$ premiers

(*) $k > 2$ donne

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2^k} < 1.$$

(**) Par d'autres considérations, on trouve $S_{4\,096} = 8{,}89\ldots$

termes d'une série convergente, dont la limite, comme on le verra, est le *logarithme népérien* de 2. Donc

$$lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=1.2.$$

14. Dans la série harmonique, prenons p termes à partir du $n^{ième}$; puis, supposant $n=p^2$, faisons croître p indéfiniment : je dis que les sommes ainsi formées ont pour limite zéro. En effet, chacune des fractions

$$\frac{1}{p^2+1},\ \frac{1}{p^2+2},\cdots\frac{1}{p^2+p}$$

est inférieure à $\frac{1}{p^2}$. Donc

$$S_{n+p}-S_n<\frac{p}{p^2},$$

ou

$$S_{n+p}-S_n<\frac{1}{p};$$

et, par conséquent,

$$\lim(S_{n+p}-S_n)=0.$$

Ainsi, comme nous l'avons déjà dit (7) : *la somme d'un nombre indéfiniment grand de termes consécutifs peut avoir pour limite zéro, sans que la série soit convergente.*

Suite des théorèmes sur la convergence.

15. Théorème V. — *Dans toute série convergente, composée de termes positifs, le produit du terme général, par le rang de ce terme, a pour limite zéro.*

Si, à partir d'une certaine valeur de n, on avait constamment

$$nu_n>\alpha,$$

α étant une constante positive, on aurait aussi

$$u_{n+1} > \frac{\alpha}{n+1}, \quad u_{n+2} > \frac{\alpha}{n+2}, \quad u_{n+p} > \frac{\alpha}{n+p},$$

puis

$$S_{n+p} - S_n > \alpha\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p}\right).$$

La quantité entre parenthèses est la somme de p termes consécutifs de la série harmonique : en prenant p suffisamment grand, on rendra cette somme, et son produit par α, supérieurs à tout nombre donné (**5.** *Rem.* IV). La série considérée serait donc divergente.

16. Théorème VI. — *Une série est convergente si, à partir d'un certain rang, le rapport d'un terme au terme précédent, pris en valeur absolue, est constamment inférieur à un nombre donné, moindre que l'unité.*

D'après le Théorème IV, il suffit de considérer le cas où tous les termes sont positifs. Or, si l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \alpha, \ldots, \quad \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < \alpha, \ldots,$$

α étant une constante positive, inférieure à l'unité, il en résulte que

$$u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \ldots, \quad u_{n+p}, \ldots$$

sont respectivement moindres que les termes de la progression décroissante

$$\alpha u_n, \quad \alpha^2 u_n, \ldots, \quad \alpha^p u_n, \ldots$$

Et comme cette progression forme une série convergente, il en est de même pour la série proposée (**8**).

17. *Remarques.* — I. Ordinairement ce théorème peut être énoncé ainsi : *Une série est convergente, si le rapport*

d'un terme au terme précédent, pris en valeur absolue, tend vers une limite inférieure à l'unité.

II. Cependant la première proposition est plus générale que la seconde : il peut arriver, en effet, que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'ait pas de limite déterminée. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour la série

$$\frac{\sin^2\varphi}{1+k\cos^2\varphi}+k\frac{\sin^2\varphi\sin^2 2\varphi}{(1+k\cos^2\varphi)(1+k\cos^2 2\varphi)}+\ldots\ldots$$
$$+k^{n-1}\frac{\sin^2\varphi\sin^2 2\varphi\ldots\sin^2 n\varphi}{(1+k\cos^2\varphi)\ldots(1+k\cos^2 n\varphi)}+\ldots\ldots,$$

dans laquelle on suppose

$$0<k<1,\quad 0<\varphi<\pi.$$

Cette série est convergente, car le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=k\frac{\sin^2(n+1)\varphi}{1+k\cos^2(n+1)\varphi}$$

est inférieur à k (*).

III. *Si tous les termes ont même signe, et que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait pour limite l'unité, la série peut être divergente.*

Dans la série harmonique, que nous savons être divergente (11), le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1};$$

donc

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$$

(*) Excepté pour les valeurs de n qui donneraient $\sin^2(n+1)\varphi=1$. Mais, dans ce cas, l'arc φ serait commensurable avec la circonférence; et, à cause de $\sin(2n+2)\varphi=0$, *la série se réduirait à un polynôme.*

IV. En conservant les notations précédentes, et en supposant *tous les termes positifs*, on a

$$R_n < \frac{\alpha}{1-\alpha} u_n.$$

En effet, les inégalités

$$u_{n+1} < \alpha u_n, \quad u_{n+2} < \alpha^2 u_n, \quad u_{n+3} < \alpha^3 u_n, \ldots\ldots$$

donnent

$$R_n < \alpha u_n (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots\cdots);$$

et, à plus forte raison,

$$R_n < \frac{\alpha}{1-\alpha} u_n.$$

18. *Applications.* — I. *La série* exponentielle

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots\cdots + \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \cdots\cdots$$

est convergente, quel que soit x.

En effet,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{x}{n} = 0.$$

II. *La série* logarithmique

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\cdots + \frac{x_n}{n} + \cdots\cdots$$

est convergente pour toutes les valeurs de x *comprises entre* + 1 *et* — 1.

Effectivement,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = x \lim \frac{n}{n+1} = x;$$

donc, en valeur absolue,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ (*)}.$$

III. *La série* du binôme

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2.3\dots(n-1)}x^{n-1} + \dots\dots$$

***est convergente lorsque la variable* x *est comprise entre* + 1 *et* — 1.**

Dans ce cas,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n+1}{n}x = -\frac{n-m-1}{n}x;$$

donc

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = -x;$$

et, en valeur absolue,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ (**)}.$$

12. Théorème VII. — ***Si les termes décroissent indéfiniment, et qu'ils soient alternativement positifs et négatifs, la série est convergente.***

Soit la série

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots\dots + u_{n-1} - u_n + u_{n+1} - \dots\dots,$$

dans laquelle nous supposons

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots\dots > u_{n-1} > u_n > u_{n+1} > \dots\dots > 0 \text{ (***)},$$

(*) La série logarithmique, *divergente* pour $x = +1$ (**11**), est *convergente* pour $x = -1$ (**12**).

(**) Cette série, développement de $(1+x)^m$, est encore convergente lorsque $x = \pm 1$, m étant positif, ou lorsque $x = 1$, m étant compris entre 0 et — 1. (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 26 octobre 1857.)

(***) Si les premiers termes ne satisfaisaient pas à ces conditions, on

et, en outre,

$$\lim u_n = 0.$$

Si, pour fixer les idées, nous supposons *n pair*, nous aurons

$$S_1 = u_1,$$
$$S_2 = u_1 - u_2,$$
$$S_3 = (u_1 - u_2) + u_3 = u_1 - (u_2 - u_3),$$
$$S_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) = u_1 - (u_2 - u_3) - u_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots\cdots + (u_{n-1} - u_n),$$
$$= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots\cdots - (u_{n-2} - u_{n-1}) - u_n.$$

On voit que les sommes de rang impair vont en diminuant, et les autres, en augmentant. En outre, *chaque somme, à indice impair, surpasse la somme à indice pair, qui la suit immédiatement.* On a donc

$$S_1 > S_3 > S_5 > \cdots\cdots > S_{n-1},$$
$$S_2 < S_4 < S_6 < \cdots\cdots < S_n,$$
$$S_1 > S_2,\ S_3 > S_4,\ S_5 > S_6, \ldots\ldots S_{n-1} > S_n.$$

Ainsi : 1° *les premières sommes ont une limite;* 2° *les secondes sommes ont une limite.*

D'ailleurs, la différence

$$S_{n-1} - S_n = u_n$$

représenterait par u_1 le terme à partir duquel, *la série devenant régulière,* elles sont vérifiées. Par exemple, dans le cas de la série

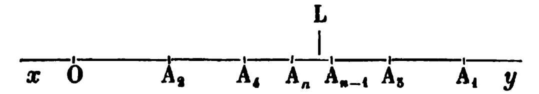
$$1 - \frac{10}{1} + \frac{10^2}{1.2} - \frac{10^3}{1.2.3} + \cdots\cdots,$$

citee plus haut (*), on ferait

$$u_1 = \frac{10^{10}}{1.2.3\ldots10},\quad u_2 = \frac{10^{11}}{1.2.3\ldots11} = \frac{10}{11}u_1,\quad u_3 = \frac{10^2}{11.12}u_1, \text{etc.}$$

a pour limite zéro ; donc *ces deux limites ont une valeur commune* S, *comprise entre deux sommes consécutives quelconques.*

20. *Remarques.* — I. Le raisonnement précédent peut être rendu encore plus clair au moyen d'une construction géométrique.



Sur une droite indéfinie xy portons, à partir d'un point fixe O, et *de gauche à droite,* la distance OA_1 proportionnelle à u_1; puis, à partir de A_1, et *de droite à gauche,* la distance A_1A_2 proportionnelle à u_2; puis, à partir de A_2, et *de gauche à droite,* la distance A_2A_3 proportionnelle à u_3; etc. A cause de $u_2 < u_1$, le point A_2 tombe entre O et A_1. De même, à cause de $u_3 < u_2$, le point A_3 tombe entre A_1 et A_2; etc. De là résulte, pour ainsi dire, que les points à *indice impair* marchent *de droite à gauche,* et que les points à *indice pair,* toujours situés à la gauche des premiers, marchent *de gauche à droite.* D'ailleurs l'intervalle $A_{n-1}A_n$, proportionnel à u_n, a pour limite zéro. Donc les points A_1, A_3, A_5, ... A_{n-1}, d'une part, et les points A_2, A_4, A_6, ... A_n, de l'autre, tendent vers un *point-limite* L, compris entre A_1 et A_2, entre A_3 et A_4, ... entre A_{n-1} et A_n; ou, ce qui est équivalent : *les sommes décroissantes* S_1, S_3, S_5, ... S_{n-1}, *et les sommes croissantes* S_2, S_4, S_6, ... S_n, *convergent vers une limite commune* S, *représentée par* OL.

II. Si les termes, alternativement positifs et négatifs, et *décroissants,* tendaient vers une limite λ différente de zéro, la série serait *indéterminée.* En effet, les sommes S_1, S_3, S_5, ... S_{n-1} iraient encore en diminuant, et les sommes S_2, S_4, ..., S_n, *respectivement moindres que les premières,*

iraient encore en augmentant; en sorte que les unes et les autres auraient des limites. Mais, à cause de

$$\lim u_n = \lim (S_{n-1} - S_n) = \lambda,$$

on aurait

$$\lim S_{n-1} - \lim S_n = \lambda.$$

Ainsi, *la limite des sommes de rang impair serait égale à la limite des sommes de rang pair, augmentée de* λ (*).

(*). Exemple :

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \cdots\cdots$$

Si l'on prend un nombre *pair* de termes,

$$S_n = \left(\frac{2}{1} - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{2n}{2n-1} - \frac{2n+1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n};$$

donc (12) *lim* $S_n = 1.2$.

Si l'on en prend un nombre *impair*,

$$S_n = 2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{5}{4} - \frac{6}{5}\right) - \cdots - \left(\frac{2n+1}{2n} - \frac{2n+2}{2n+1}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{4.5} - \cdots - \frac{1}{2n(2n+1)}$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}:$$

lim $S_n = 1 + 1.2$.

Du reste, la construction indiquée conduit à la même conclusion : les points A_1, A_3, A_5, ...

x O A_2 A_4 A_6 L_2 L_1 A_5 A_3 A_1 y

tendent vers un point-limite L_1, tandis que les points A_2, A_4, A_6, ... tendent vers un autre point-limite L_2. De plus, la distance L_1L_2 est proportionnelle à λ.

III. *Une série à termes alternativement positifs et négatifs, dont le terme général a pour limite zéro, peut être divergente.*

Pour justifier cette proposition, il suffit de considérer la série

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots:$$

la somme des $2n$ premiers termes est

$$S_{2n}=2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right);$$

donc la série est divergente.

Cette conclusion n'est pas contradictoire avec le Théorème VII. En effet, l'énoncé de ce théorème suppose $u_1 > u_2 > u_3 > u_4\ldots$; et, dans la dernière série, *les termes sont tantôt croissants, tantôt décroissants.*

IV. En général, *on ne peut pas grouper, arbitrairement, les termes d'une série* (*). Soit

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$$
$$+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\frac{1}{16}+\frac{1}{17}-\cdots;$$

d'où

$$2S=2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{5}$$
$$+\frac{2}{11}-\frac{1}{6}+\frac{2}{13}-\frac{1}{7}+\frac{2}{15}-\frac{1}{8}+\frac{2}{17}-\cdots$$

(*) Voir, plus loin, le *Théorème de Dirichlet.*

Si l'on réduit, on trouve

$$2S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \cdot \cdot,$$

ou

$$2S = S;$$

conclusion absurde, attendu que *la limite* S *est comprise entre* 1 *et* $\frac{1}{2}$ (19).

21. Théorème VIII. — *Les mêmes choses étant posées que dans le Théorème VII, l'erreur* ε *que l'on commet en prenant la somme* S_n, *au lieu de sa limite* S, *est inférieure au terme* u_{n+1} *qui suit celui auquel on s'arrête.*

1° Si n est pair, on a

$$S_n < S < S_{n+1};$$

d'où

$$S - S_n < S_{n+1} - S_n,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon < u_{n+1}.$$

2° n étant impair, on a

$$S_n > S > S_{n+1};$$

puis

$$S_n - S < S_n - S_{n+1};$$

et enfin

$$\varepsilon < u_{n+1}.$$

22. *Remarque.* — L'erreur ε, prise positivement ou négativement, suivant que n est pair ou impair, est égale au reste R_n de la série.

Exemples de séries.

23. Premier exemple. — Considérons d'abord la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots\dots\dots,$$

dont le terme général

$$u_n = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \text{ (*)}.$$

Nous savons que cette série est convergente (**18**, I). On désigne ordinairement par la lettre e la limite de la somme de ses termes; en sorte que

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} + \cdots$$

24. 1° *Le nombre* e *est compris entre* 2 et 3. La première partie de la proposition est évidente. Pour démontrer la seconde, observons que les fractions

$$\frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{1.2.3.4}, \ldots, \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}, \ldots$$

sont (la première exceptée) respectivement moindres que les termes de la progression

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots, \frac{1}{2^{n-2}}, \ldots$$

La limite de la somme des termes de cette progression est l'unité; donc $e < 3$.

2° *Le nombre* e *est incommensurable.* — S'il était égal à une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, on aurait, en mettant en évidence le terme dont le dénominateur se termine par le facteur q :

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots q} + \frac{1}{1.2.3\ldots q(q+1)} + \cdots;$$

(*) Le premier terme échappe à cette loi.

puis, en multipliant les deux membres par $1.2.3\ldots q$:

$$E = E' + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots;$$

E et E′ désignant des nombres entiers.

Cette dernière égalité est impossible, car elle donne

$$E < E' + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots,$$

ou

$$E < E' + \frac{1}{q};$$

ce qui est absurde, à cause de $E > E'$.

25. *Calcul de* e. *Limite de l'erreur commise.* — La méthode au moyen de laquelle nous venons de prouver l'incommensurabilité du nombre e donne aussi la limite de l'erreur ε que l'on commet quand on prend seulement les n premiers termes de la série. On a

$$\varepsilon = \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)} + \cdots;$$

donc, par le calcul précédent,

$$\varepsilon < \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right],$$

ou

$$\varepsilon < \frac{n+1}{1.2.3\ldots(n-1)n^2},$$

ou encore

$$\varepsilon < \frac{n+1}{n^2}u_n.$$

En faisant usage de cette formule, et en observant que les termes de la série se déduisent, les uns des autres, par

des divisions successives très-simples, on peut calculer rapidement, avec une grande approximation, la valeur de e. Par exemple, si l'on se borne à neuf décimales, on aura

$$
\begin{aligned}
1 + 1 &= 2 \\
\frac{1}{2} &= 0{,}500\,000\,000 \\
\frac{1}{2.3} &= 0{,}166\,666\,666 \\
\frac{1}{2.3.4} &= 0{,}041\,666\,666 \\
\frac{1}{2.3.4.5} &= 0{,}008\,333\,333 \\
\frac{1}{2.3...6} &= 0{,}001\,388\,888 \\
\frac{1}{2.3...7} &= 0{,}000\,198\,412 \\
\frac{1}{2.3...8} &= 0{,}000\,024\,801 \\
\frac{1}{2.3...9} &= 0{,}000\,002\,755 \\
\frac{1}{2.3...10} &= 0{,}000\,000\,275 \\
\frac{1}{2.3...11} &= 0{,}000\,000\,025 \\
\frac{1}{2.3...12} &= 0{,}000\,000\,002 \\
&\overline{\,2{,}718\,281\,823}
\end{aligned}
$$

Si nous n'avions pas négligé les décimales qui devraient suivre la neuvième, nous aurions, d'après la formule précédente,

$$\varepsilon < 0{,}000\,000\,002 \cdot \frac{14}{13^2};$$

et, à plus forte raison, $\varepsilon < 0,000\ 000\ 000\ 2$. Ainsi les neuf décimales obtenues seraient exactes. Pour tenir compte des *retenues*, calculons une décimale de plus: en la prenant par défaut, nous devrons ajouter, au résultat précédent,

$6+6+3+8+6+5+7+5+0+0+1$ unités du 10ᵉ ordre décimal,

ou

$$0,000\ 000\ 004\ 7.$$

En prenant par excès la dixième décimale, nous avons, pour nouvelle somme,

$$0,000\ 000\ 005\ 8.$$

Ainsi

$$S_{13} > 2,718\ 281\ 823 + 0,000\ 000\ 004\ 7,$$

$$S_{13} < 2,718\ 281\ 823 + 0,000\ 000\ 005\ 8;$$

ou

$$S_{13} > 2,718\ 281\ 827\ 7, \quad S_{13} < 2,718\ 281\ 828\ 8.$$

D'un autre côté, le dernier terme calculé, u_{13}, est certainement inférieur à 0,000 000 002 2; donc

$$\varepsilon < 0,000\ 000\ 000\ 2.$$

Par suite, la valeur de e est comprise entre

$$2,718\ 281\ 827\ 7 \quad \text{et} \quad 2,718\ 281\ 829\ 0.$$

En effet,

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ldots\ (^*).$$

26. Les détails dans lesquels nous venons d'entrer à propos de l'incommensurable e sont justifiés par l'inportance de ce nombre, que l'on rencontre dans une foule de

(*) En écrivant 1828 deux fois de suite à la droite de 27, on a la valeur de e avec neuf décimales.

recherches; nous verrons bientôt qu'il sert de base au système des logarithmes *népériens*.

27. Deuxième exemple. — Soit la série

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots,$$

dans laquelle

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}.$$

Il est évident que $\lim u_n=0$ et que $\lim nu_n=0$. Ainsi, la série est *peut-être* convergente.

Pour reconnaître si elle l'est réellement, cherchons la limite du rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}=\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}};$$

donc

$$\lim\frac{u_n}{u_{n-1}}=1.$$

D'après l'une des remarques du n° 17, on ne peut encore rien affirmer sur la convergence ou la divergence de la série proposée. Mais, si l'on fait attention que

$$\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ldots,$$

on a, pour somme des n premiers termes,

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

ou

$$S_n=1-\frac{1}{n+1};$$

et, conséquemment,

$$\lim S_n = S = 1.$$

La série proposée est donc convergente; et la somme de ses n premiers termes, égale à $1 - \frac{1}{n+1}$, a pour limite l'unité.

28. *Remarque.* — Le procédé que nous venons d'employer est souvent applicable.

29. Troisième exemple. — Considérons la série

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots \pm \frac{1}{p} \mp \cdots, \quad (1)$$

dont les termes, abstraction faite des signes, sont égaux à ceux de la série harmonique. Afin de reconnaître plus aisément si elle est convergente ou divergente, écrivons-la ainsi :

$$\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \cdots \quad (2)$$

Il est maintenant visible que le $n^{\text{ième}}$ *groupe de trois termes* de (1), ou le $n^{\text{ième}}$ terme de (2), est

$$u_n = \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} \text{ (*)};$$

ou, après la réduction au dénominateur commun,

$$u_n = \frac{9n^2 - 2}{(3n-2)(3n-1)3n}.$$

Cette fraction est positive à partir de $n=1$; donc *la série* (1)

(*) Pour justifier cette *transformation de série*, il suffit d'observer que, *le terme général de la série* (1) *ayant pour limite zéro, les séries* (1) *et* (2) *sont, en même temps, convergentes, divergentes ou indéterminées*. En effet, à cause de $p = 3n$, ou $3n+1$, ou $3n+2$, S_n ne peut différer, de S'_p, que d'une quantité dont la limite est zéro.

a tous ses termes positifs. De plus, ils diminuent indéfiniment à mesure que n augmente. Mais comme

$$nu_n = \frac{9n^2 - 2}{(3n-2)(3n-1)3} = \frac{9 - \frac{2}{n^2}}{\left(3 - \frac{2}{n}\right)\left(3 - \frac{1}{n}\right)3},$$

le produit nu_n *a pour limite* $\frac{1}{3}$ (*). Ainsi la série (2) est divergente (**14**); et la série (1) l'est aussi.

20. Quatrième exemple. — Soit enfin la série

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \cdots \qquad (3)$$

Opérant comme dans l'exemple précédent, nous aurons

$$u_n = \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n} = \frac{9n-4}{(3n-2)(3n-1)3n}.$$

Cette fraction, qui est positive, diminue indéfiniment à mesure que n augmente. De plus, le produit nu_n a pour limite zéro (**). Ainsi, *il est très-probable* que la série proposée est convergente. Une transformation fort simple va changer cette probabilité en certitude. Écrivons

$$u_n = \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n}\right) + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n}\right),$$

(*) En général, soit une fraction

$$\frac{Ax^p + Bx^{p-1} + \cdots + Tx + U}{A'x^{p'} + B'x^{p'-1} + \cdots + T'x + U'}$$

dont les termes sont des polynômes entiers, et dans laquelle on fait croître indéfiniment la variable x. 1° *Si* $p = p'$, *la fraction tend vers* $\frac{A}{A'}$; 2° *Si* p *surpasse* p', *la fraction croît au delà de toute limite;* 3° *Si* p' *surpasse* p, *la fraction tend vers zéro.* Il suffit, pour démontrer cette proposition, de diviser les deux termes par x^p.

(**) Voir la note précédente.

et posons

$$u'_n = \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n}, \quad u''_n = \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n};$$

d'où résulte

$$u_n = u'_n + u''_n;$$

puis, en désignant par S_n, S'_n, S''_n, les sommes correspondantes :

$$S_n = S'_n + S''_n.$$

Les séries ayant u'_n, u''_n pour termes généraux sont convergentes (**19**); donc *la série* (3) *est convergente*. De plus,

$$\lim S_n = \lim S'_n + \lim S''_n \text{ (*)}.$$

Exercices.

I. Théorème. — *La série*

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots$$

est convergente quand m *surpasse l'unité.*

II. Théorème. — *La série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots,$$

dont tous les termes sont positifs, est convergente ou divergente suivant que $\sqrt[n]{u_n}$ *tend vers une limite inférieure ou supérieure à l'unité.*

III. Théorème. — *En représentant par* a *un nombre plus grand que l'unité, on a*

$$1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1.2}{(a+1)(a+2)} + \frac{1.2.3}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \cdots = \frac{a}{a-1}.$$

(*) Les valeurs de ces diverses limites seront données plus loin.

IV. Les séries

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots,$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots,$$

déduites de la série convergente

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$$

sont-elles convergentes? Si elles le sont, ont-elles même *somme* que cette dernière série?

V. Sommer la série dont le terme général est

$$u_n=\frac{n^2-n+1}{n(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

VI. Prouver que

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots=\frac{1}{4}.$$

VII. Théorème de Goldbach. — *Si l'on donne aux entiers* m *et* p *toutes les valeurs possibles, supérieures à l'unité, on aura*

$$\lim \sum \frac{1}{m^p-1}=1;$$

pourvu que, dans cette somme, on ne compte qu'une seule fois une même fraction (*).

(*) Ainsi le théorème consiste en ce que

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{26}+\frac{1}{80}+\cdots+\frac{1}{63}+\frac{1}{255}+\cdots=1.$$

(Voir *Journal de Liouville*, tome VII, p. 1.)

VIII. 1° Quel et le n^{me} terme de la série

$$\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\cdots ?$$

2° Cette série est convergente.

3° La somme S_n de ses n premiers termes est comprise entre $\frac{n}{4n-1}$ et $\frac{n}{2n+1}$.

4° Si l'on représente par A_n la somme des n termes qui, dans la série harmonique, suivent les n premiers, on a

$$S_n = A_{2n} - \frac{1}{2}A_n.$$

5° D'après cela, en admettant que $\lim A_n = l.2$ (*) :

$$\frac{1}{4}l.2 = \frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{9.10.11}+\cdots$$

IX. Trouver la somme des n premiers termes de la série

$$\frac{1.2.3}{4.5.6.7}+\frac{2.3.4}{5.6.7.8}+\frac{3.4.5}{6.7.8.9}+\cdots;$$

et, *si la série est convergente*, déterminer la limite de cette somme.

X. Démontrer la *convergence* de

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{8}}\right)+\cdots,$$

et la *divergence* de

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)-\frac{1}{\sqrt{4}}+\left(\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}\right)-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$$

(*) Voir ci-dessus (12).

XI. Démontrer les relations suivantes, dans lesquelles a est un nombre entier donné :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+a)} = \frac{1}{a}\sum_1^a \frac{1}{n},$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+a)(n+2a)} = \frac{1}{2a}\sum_1^a \frac{1}{n(n+a)},$$

. . . .

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+a)\ldots(n+\overline{p-1}a)} = \frac{1}{(p-1)a}\sum_1^a \frac{1}{n(n+a)\ldots(n+\overline{p-2})a} \ (*).$$

XII. De quelles natures sont les séries ayant pour termes généraux :

$$u_n = \frac{1}{n+1+\cos n\pi}, \qquad u_n = \frac{1}{(n+1+\cos n\pi)^2},$$

$$u_n = \frac{1}{n\sin\frac{n\pi}{2} - n^2\cos\frac{n\pi}{2}}, \qquad u_n = \frac{1}{\left(n\sin\frac{n\pi}{2} - n^2\cos\frac{n\pi}{2}\right)^2}?$$

XIII. Évaluer la somme des n premiers termes de la série

$$(1+x) + (x^2 + x^4 + x^3) + (x^6 + x^8 + x^{10} + x^5) + \cdots$$

Vers quelle limite tend cette somme, lorsque x^2 est inférieur à l'unité ?

(*) Dans ces diverses égalités, la lettre Σ (*sigma*) désigne une somme; les *indices* de cette lettre sont les *valeurs extrêmes* du nombre entier n. Si, par exemple, $a = 3$ et $p = 5$, la dernière relation exprime que la série

$$\frac{1}{1.4.7.10.13} + \frac{1}{2.5.8.11.14} + \frac{1}{3.6.9.12.15} + \cdots$$

a pour *somme* :

$$\frac{1}{12}\left[\frac{1}{1.4.7.10} + \frac{1}{2.5.8.11} + \frac{1}{3.6.9.12} + \frac{1}{4.7.10.13}\right].$$

XIV. Admettant que

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

trouver

$$S=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots$$

XV. S désignant la somme de la série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

prouver que

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots=\frac{S^2}{2}.$$

XVI. Théorème. — *Si l'on a*

$$0<u_1<u_2<\cdots<u_{n-1}<u_n<u_{n+1}<\cdots,$$

et

$$\lim u_n=\lambda,$$

λ étant une quantité finie; la série est indéterminée (*).

XVII. Théorème. — *Si* a + 1 *surpasse* b, *et que* 2b *soit un nombre entier, on a*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(n+a)^2-b^2}=\frac{1}{2b}\sum_1^{2b}\frac{1}{p+a-b}\ (^{**}).$$

(*) On peut comparer ce théorème avec celui que nous avons démontré ci-dessus (20, *Rem.* II).

(**) Par exemple,

$$\frac{1}{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{3^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{4^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\cdots=\frac{2}{3}.$$

XVIII. Théorème. — *Soit une série à termes positifs et décroissants :*

$$\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3}+\cdots+\frac{1}{A_n}+\cdots \qquad (1)$$

Au moyen des différences positives

$$A_2-A_1=a_1,\quad A_3-A_2=a_2,\ldots A_{n+1}-A_n=a_n,$$

on forme une seconde série

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots \qquad (2)$$

Cela posé :

1° *Si la série (2) est convergente, ou si elle n'est pas plus divergente que la série harmonique, la série (1) est convergente ;*

2° *Si la série (2) est plus divergente que la série harmonique, et que le dénominateur* a_n *tende vers une limite, la série (1) est divergente.*

XIX. Théorème de Dirichlet. — *La somme d'une série convergente n'est pas altérée par un changement dans l'ordre des termes lorsque ceux-ci, pris positivement, forment encore une série convergente.*

XX. Théorème de Riemann. — *Soit une série convergente*

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots,$$

qui cesse de l'être quand les termes sont pris positivement. Si l'on change l'ordre de ces termes, la série peut : 1° rester convergente ; 2° devenir divergente ou indéterminée. En outre, dans le premier cas, la somme de la nouvelle série peut être prise arbitrairement.

XXI. Théorème. — *Si la série*

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$$

est convergente, les séries

$$(u_1 + u_3) - (u_2 + u_4) + (u_5 + u_7) - (u_6 + u_8) + \cdots,$$
$$(u_1 + u_3 + u_5) - (u_2 + u_4 + u_6) + (u_7 + u_9 + u_{11}) - (u_8 + u_{10} + u_{12}) + \cdots,$$
. . . .

ont même somme que la première.

CHAPITRE II.

ARRANGEMENTS ET COMBINAISONS.

Définitions.

21. 1° On appelle *arrangements de* n *lettres,* p *à* p, *les mots composés de* p *lettres prises parmi les* n *lettres données* (*).

D'après cette définition, *deux arrangements* quelconques *diffèrent, soit par les lettres* qui y entrent, *soit par l'ordre* de ces lettres.

Ainsi les arrangements, trois à trois, des cinq lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, sont

abc, *bac*, *bca*, *bde*, *eda*, *dbe*....

2° *Les permutations de* n *lettres sont les arrangements formés avec ces lettres prises toutes ensemble* (**). Par

(*) Cette définition, assez différente des définitions ordinaires, nous a semblé propre à empêcher les élèves de confondre les arrangements et les combinaisons. Il est peut-être superflu d'ajouter que les *assemblages* de lettres, auxquels nous donnons le nom de *mots*, peuvent n'avoir aucune signification; ils peuvent même n'être pas *prononçables*.

(**) Les permutations sont donc un cas particulier des arrangements.

exemple, les lettres *a*, *b*, *c* donnent les *six* permutations

abc, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*.

3° Enfin, on appelle *combinaisons, les arrangements dont la composition est différente,* c'est-à-dire les arrangements tels, que deux quelconques d'entre eux diffèrent au moins par une lettre.

Les combinaisons des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, prises trois à trois, sont donc

abc, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde*, *cde*.

22. *Remarques.* — I. L'ordre des lettres, dans une combinaison donnée, est indifférent : pour plus de simplicité, on choisit ordinairement, comme nous venons de le faire, l'ordre alphabétique.

II. Tant de lettres que l'on voudra, prises toutes ensemble, donnent lieu à *une seule* combinaison.

III. Pour *effectuer* les arrangements *p* à *p* de *n* lettres, on peut combiner d'abord ces lettres *p* à *p*, et permuter ensuite les *p* lettres entrant dans chaque combinaison. Il est visible, en effet, que si l'on opère ainsi, il n'y aura *ni arrangement omis, ni arrangement répété.*

Les combinaisons écrites ci-dessus donneraient, de cette manière, les *soixante* arrangements, trois à trois, des cinq lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; savoir :

abc,	*abd*,	*abe*,	.....	*cde*,
acb,	*adb*,	*aeb*,	.....	*ced*,
bac,	*bad*,	*bae*,	....	*dce*,
bca,	*bda*,	*bea*,	.....	*dec*,
cab,	*dab*,	*eab*,	.....	*ecd*,
cba,	*dba*,	*eba*,	.....	*edc*.

Problèmes principaux.

28. Problème I. — *Trouver le nombre des arrangements,* p *à* p, *de* n *lettres.*

Soit $A_{n,p}$ ce nombre. Pour le déterminer, observons que si l'on connaissait les arrangements $p-1$ à $p-1$ des n lettres données, arrangements dont le nombre sera désigné par $A_{n,p-1}$, on formerait aisément les arrangements p à p des mêmes lettres. En effet, *à la droite de chacun des arrangements composés de* p — 1 *lettres, inscrivons, successivement, chacune des* n — (p — 1) *lettres qui n'y entrent pas :* nous obtiendrons, *sans omission et sans répétition,* les arrangements cherchés. D'ailleurs, chaque arrangement de $p-1$ lettres a produit $n-p+1$ arrangements de p lettres; donc

$$A_{n,p} = (n-p+1)\,A_{n,p-1}.$$

Cette relation générale donne, par le changement de p en $p-1, p-2, \ldots, 3, 2$:

$$A_{n,p-1} = (n-p+2)\,A_{n,p-2},$$
$$A_{n,p-2} = (n-p+3)\,A_{n,p-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{n,3} = (n-2)\,A_{n,2},$$
$$A_{n,2} = (n-1)\,A_{n,1}.$$

D'ailleurs, $A_{n,1}$, ou le nombre des arrangements de n lettres prises 1 à 1, est évidemment n. Par suite,

$$A_{n,p} = n(n-1)\ldots(n-p+1). \qquad \text{(A)}$$

Telle est la formule cherchée. Elle exprime que *le nombre des arrangements* p *à* p, *de* n *lettres, est égal au produit de* p *nombres entiers, consécutifs et décroissants, dont le premier est* n.

24. PROBLÈME II. — *Trouver le nombre* P_n *des permutations de* n *lettres.*

Si, dans la formule (A), on suppose $p=n$, on trouve

$$A_{n,n}=n(n-1)\ldots 1,$$

ou

$$P_n=1.2.3\ldots n. \qquad \text{(B)}$$

Ainsi, *le nombre des permutations de* n *lettres est égal au produit des* n *premiers nombres naturels.*

25. PROBLÈME III. — *Trouver le nombre des combinaisons,* p *à* p, *de* n *lettres.* D'après la Remarque III (**22**), chacune de ces combinaisons donne autant d'arrangements que l'indique le nombre P_p des permutations de p lettres; donc *le nombre* $A_{n,p}$ *des arrangements de* n *lettres,* p *à* p, *est égal au nombre* $C_{n,p}$ *des combinaisons de ces* n *lettres, multiplié par le nombre* P_p *des permutations de* p *lettres;* donc aussi

$$C_{n,p}=\frac{A_{n,p}}{P_p}. \qquad \text{(C)}$$

26. La formule (C) peut être écrite de différentes manières. D'abord, si l'on remplace le numérateur et le dénominateur par leurs valeurs tirées des formules (A) et (B), on aura

$$C_{n,p}=\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}; \qquad \text{(D)}$$

ou, en observant que les deux termes contiennent le même nombre de facteurs,

$$C_{n,p}=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\frac{n-p+1}{p}. \qquad \text{(E)}$$

Ainsi, *le nombre des combinaisons de* n *lettres,* p *à* p, *est égal au produit des* p *fractions*

$$\frac{n}{1},\ \frac{n-1}{2},\ \frac{n-2}{3},\ \ldots,\ \frac{n-p+1}{p}.$$

Enfin, si l'on multiplie les deux termes de la fraction (D) par $1.2.3 \dots (n-p)$, on obtient

$$C_{n,p} = \frac{1.2.3 \dots n}{1.2.3 \dots p.1.2.3 \dots (n-p)}. \qquad \text{(F)}$$

27. *Remarques.* — I. Les combinaisons de n lettres sont nécessairement en nombre entier; donc la fraction (D) doit être réductible à un nombre entier, ou, ce qui est équivalent :

Le produit de p *nombres entiers consécutifs est divisible par le produit des* p *premiers nombres naturels* (*).

II. Le second membre de la formule (F) ne change pas quand on y remplace p par $n-p$; donc

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}; \qquad \text{(G)}$$

ou, en d'autres termes :

Le nombre des combinaisons de n *lettres, prises* p *à* p, *est égal au nombre des combinaisons de ces lettres, prises* n — p *à* n — p (**).

28. *Applications.* — I. *Combien les* 10 *lettres du mot* LOGARITHME, *prises* 1 *à* 1, 2 *à* 2, ..., 10 *à* 10, *peuvent-elles former d'arrangements?*

La formule (A) donne, successivement :

$A_{10,1} = 10$, $A_{10,2} = 10.9 = 90$, $A_{10,3} = 90.8 = 720$,
$A_{10,4} = 720.7 = 5\,040$, $A_{10,5} = 5\,040.6 = 30\,240$,
$A_{10,6} = 30\,240.5 = 151\,200$, $A_{10,7} = 151\,200.4 = 604\,800$,
$A_{10,8} = 604\,800.3 = 1\,814\,400$,
$A_{10,9} = A_{10,10} = P_{10} = 1\,814\,400.2 = 3\,628\,800$.

(*) On peut démontrer ce théorème par des considérations purement arithmétiques.

(**) Cette propriété est presque évidente : *à chaque combinaison renfermant* p *des* n *lettres données, correspond une combinaison formée des* n — p *autres lettres;* donc le nombre des premières combinaisons est égal au nombre des dernières.

Ainsi, avec les 10 lettres données, on peut former 10 mots d'*une* lettre, 90 mots de *deux* lettres, ..., 3 628 800 mots de *dix* lettres : en tout, 9 864 100 mots. Il est évident que ces nombres seraient considérablement réduits si l'on rejetait, par exemple, tous les mots renfermant *trois consonnes* consécutives (*), tous ceux qui ne contiennent pas de *voyelles*, etc.

II. *De combien de manières* 12 *personnes peuvent-elles occuper* 12 *places autour d'une table?*

Ce nombre est

$$P_{12} = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12 = 479\,001\,600 \text{ (**)}.$$

III. *De combien de manières peut-on choisir* 5 *cartes dans un jeu de piquet?*

L'ordre dans lequel les 5 cartes *choisies* ou *tirées* étant indifférent, le nombre cherché est celui des combinaisons de 32 lettres 5 à 5, c'est-à-dire

$$C_{32,5} = \frac{32.31.30.29.28}{1.2.3.4.5} = 32.31.29.7 = 201\,376.$$

Permutations et combinaisons avec répétition.

29. Dans ce qui précède, les lettres arrangées ou combinées étaient essentiellement différentes. Quand cette condition est supprimée, on a des *arrangements* ou des *combinaisons avec répétition*. Par exemple, on peut se proposer la question suivante :

(*) Ordinairement, ces mots ne sont pas prononçables : le mot *logarithme* fait exception.

(**) Si les 12 personnes effectuaient une permutation par minute, et si elles consacraient à ce *travail* 12 heures par jour et 360 jours par année, il leur faudrait 1848 ans pour venir à bout de leur tâche!

Quel est le nombre N *des permutations de* n *lettres, parmi lesquelles se trouvent* α *fois la lettre* a, β *fois la lettre* b, ..., θ *fois la lettre* t?

Pour *effectuer* ces permutations, il suffirait de faire occuper, par les n lettres, n places données. De ces n places, α peuvent être occupées par les α lettres a, d'autant de manières que l'indique le nombre $C_{n,\alpha}$ des combinaisons de n lettres, α à α. De même, β des $n-\alpha$ places restantes, peuvent être remplies par les β lettres b, d'un nombre de manières égal à $C_{n-\alpha,\beta}$; etc. Enfin, quand toutes les lettres, autres que t, auront été employées, il restera θ places, dont la répartition entre les θ lettres t se fera d'une seule manière, ou d'un nombre de manières égal à $C_{\theta,\theta}$ (**32**, II). Par suite,

$$N = C_{n,\alpha} \cdot C_{n-\alpha,\beta} \cdot C_{n-\alpha-\beta,\gamma} \ldots C_{\theta,\theta},$$

ou

$$N = \frac{1.2.3 \ldots n}{1.2.3 \ldots \alpha \times 1.2.3 \ldots \beta \times \ldots \times 1.2.3 \ldots \theta}. \qquad \text{(H)}$$

40. *Remarque.* — La formule (H) est la généralisation de la formule (F). Elle montre que *si un nombre entier* n *est égal à la somme des nombres entiers* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta$, *le produit* $1.2.3 \ldots n$ *est divisible par le produit*

$$1.2 \ldots \alpha . 1.2 \ldots \beta \ldots 1.2 \ldots \theta.$$

41. *Application.* — *De combien de manières peut-on permuter les* 21 *lettres du mot* CONSTITUTIONNELLEMENT?

Ce mot contient 2 fois la lettre o, 4 fois la lettre n, etc.; donc

$$N = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9 \ldots 21}{1.2.1.2.3.4.1.2.3.4.1.2.1.2.3.1.2}$$

$$= 5.7.9.10.11.7.15.16.17.18.19.20.11,$$

ou

$$N = 142\,146\,718\,560\,000 \text{ (*)}.$$

12. *Combinaisons avec répétition* (**). — Supposons, pour fixer les idées, que trois lettres a, b, c aient été combinées 7 à 7, de la manière suivante :

$$aaabbbb,\quad abbbbcc,\quad bbccccc,\quad aaaaacc, \ldots \qquad (1)$$

Dans chacune de ces combinaisons, substituons, à chaque lettre *répétée*, le rang qu'elle occupe dans la combinaison : la suite (1) sera remplacée par

$$a23b567,\quad ab345c7,\quad b2c4567,\quad a2345c7, \ldots \qquad (2)$$

Cette nouvelle suite contient toutes les combinaisons *simples* des trois lettres a, b, c et des six chiffres 2, 3, 4, 5, 6, 7. Le nombre des termes de la suite (1), égal à celui des termes de la suite (2), est donc $C_{3+6,7}$, ou 36. Le même raisonnement subsiste dans le cas de n lettres combinées p à p. Donc la formule des combinaisons *complètes* est

$$N_{n,p} = C_{n+p-1,p} = C_{n+p-1,n-1}. \qquad (I)$$

(*) Quand une permutation offre un sens, elle prend le nom d'*anagramme*. Quelques anagrammes sont célèbres : dans *frère Jacques Clément*, on trouve : *c'est l'enfer qui m'a créé;* un poëte composa cette anagramme pour *Marguerite de Valois : Salve, Virgo, Mater Dei.* Enfin, *Révolution française* donne lieu à deux curieuses permutations : *Un Corse la finira; Veto. — La France veut son roi.*

Au lieu de permuter des lettres, on peut faire des permutations de mots : une scène du *Bourgeois gentilhomme* contient un exemple de ces jeux d'esprit. En voici un autre, moins connu :

Saint Honoré
Dans sa chapelle,
Avec sa pelle,
Est honoré.

Ce quatrain en produit vingt-quatre, exprimant tous la même idée.

(**) On dit aussi *combinaisons complètes.*

43. *Application.* — *Quel est le nombre des termes d'un polynôme homogène complet, du degré* p, *renfermant* n *lettres* a, b, c, ... t?

Si l'on fait abstraction des coefficients, un terme quelconque du polynôme a la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots t^\theta$, pourvu que

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \theta = p.$$

D'ailleurs l'expression

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots t^\theta = aaa \ldots bbb \ldots ccc \ldots tt \ldots$$

peut être regardée comme une *combinaison* renfermant α fois la lettre a, β fois la lettre b, etc. Donc le nombre cherché est $N_{n,p}$.

Par exemple, le développement de $(a+b+c)^7$ contient 36 termes. De même, le nombre des termes du développement de $(a+b+c+d+e+f+g)^3$ est $C_{3+7-1,3} = 84$.

Triangle arithmétique.

44. La formule

$$C_{n,p} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-p+1}{p} \tag{E}$$

peut être écrite ainsi :

$$C_{n,p} = C_{n,p-1} \cdot \frac{n-p+1}{p} = \frac{n+1}{p} C_{n,p-1} - C_{n,p-1}.$$

Mais,

$$\frac{n+1}{p} C_{n,p-1} = C_{n+1,p};$$

donc

$$C_{n+1,p} = C_{n,p-1} + C_{n,p};$$

ou, si l'on remplace n par $n-1$:

$$C_{n,p} = C_{n-1,p-1} + C_{n-1,p}. \tag{K}$$

Ainsi, *le nombre des combinaisons de* n *lettres,* p *à* p, *est égal à la somme du nombre des combinaisons de* n — 1 *lettres,* p — 1 *à* p — 1, *et du nombre des combinaisons de* n — 1 *lettres,* p *à* p.

Ce théorème, qui permet évidemment d'obtenir les nombres de combinaisons, par des additions successives, paraît en défaut dans le cas de $p = 1$. Mais, comme la relation $C_{n,p} = C_{n,n-p}$ devient, si l'on suppose $p = 0$, $C_{n,0} = C_{n,n} = 1$, *on peut convenir que l'expression* $C_{n,0}$ *égale l'unité.*

Cela posé, si l'on part de $C_{1,0} = 1$ et de $C_{1,1} = 1$, et que l'on applique la formule (K), on formera le tableau suivant, connu sous le nom de *Triangle arithmétique, de Pascal.* Dans ce tableau, le $p^{ième}$ terme d'une ligne horizontale de rang n, égal à $C_{n,p}$, s'obtient en *ajoutant le terme de même rang, dans la ligne précédente, avec le terme qui précède celui-ci.*

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
. . . .

45. *Remarques.* — D'après la manière dont le triangle arithmétique est formé :

1° Dans une ligne horizontale quelconque, les termes à égales distances des extrêmes sont égaux ; et, conséquemment, *la somme des termes de rang pair est égale à la somme des termes de rang impair ;*

2° Chacune de ces sommes égale la somme des termes contenus dans la colonne précédente;

3° *La somme des termes de la* $n^{ième}$ *colonne est* 2^n ;

4° *Le* p^{ième} *terme, de la* n^{ième} *colonne, est égal à la somme des termes de rang* p — 1 *dans toutes les colonnes précédentes;*

5° D'après cela, *la somme des nombres de combinaisons,* p *à* p, *de* p *lettres, de* p + 1 *lettres, ..., de* n *lettres, égale le nombre des combinaisons de* n + 1 *lettres,* p + 1 *à* p + 1 (*).

Par exemple,

$$C_{9,4} = C_{8,3} + C_{7,3} + C_{6,3} + C_{5,3} + C_{4,3} + C_{3,3},$$

ou

$$\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} = \frac{8.7.6}{1.2.3} + \frac{7.6.5}{1.2.3} + \frac{6.5.4}{1.2.3} + \frac{5.4}{1.2} + 4 + 1,$$

ou

$$126 = 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1.$$

Exercices.

I. Quelle serait la hauteur d'une pile formée par le papier nécessaire pour écrire toutes les permutations des lettres composant ce vers :

Qui n'a pas ce qu'il veut, doit vouloir ce qu'il a?

L'épaisseur des rames empilées les unes sur les autres est de 5 centimètres; chaque rame contient 600 feuilles; chaque feuille, 4 pages; chaque page, 45 lignes; et chaque ligne, 2 permutations.

Réponse :

10 549 548 739 409 315 303 116 800 mètres (**).

(*) Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ces propriétés intéressantes. La dernière, que l'on peut formuler ainsi

$$\sum_{0}^{n-p} C_{p+i,\,p} = C_{n+1,\,p+1},$$

est une conséquence de l'équation (K).

(**) *68 930 120 433 250 fois la distance de la Terre au Soleil!*

II. Combien y a-t-il de parties de *domino* essentiellement différentes? Le jeu se compose de 28 dés, et chacun des deux joueurs en prend 7.

Réponse : 137 680 171 200.

III. Combien y a-t-il de parties d'*écarté* essentiellement différentes?

Réponse : 354 883 858 560.

IV. Combien y a-t-il de mots formés de trois voyelles et de six consonnes?

Réponse : 98 456 601 600.

V. Les deux faces d'un jeton de forme hexagonale sont partagées chacune, par trois diamètres, en six triangles équilatéraux égaux entre eux. On applique, sur chaque triangle, une des sept couleurs primitives, de manière que deux triangles appartenant à la même face ne soient pas de la même couleur. Combien peut-on former de jetons, essentiellement inégaux, satisfaisant à ces conditions?

Réponse : 2 116 800.

VI. De combien de manières peut-on appliquer quatre des sept couleurs primitives sur les quatre faces d'un tétraèdre régulier?

Réponse : 70.

VII. Ayant pris sur un plan n points $a, b, c, \ldots$, tels, que trois d'entre eux ne soient pas en ligne droite, on les joint deux à deux par des droites ab, ac, bc, ..., qui se coupent en de nouveaux points A, B, C, ... Quel est le nombre N de ces points?

Réponse :

$$N = \frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

VIII. Quel temps faudrait-il pour ranger dans une boite à dominos, de toutes les manières possibles, les vingt-huit dés composant le jeu? On suppose que chaque rangement puisse s'effectuer en une minute et que les dés soient toujours tournés dans le même sens.

Réponse :

304 888 444 611 713 860 501 504 000 000 minutes,

ou environ 5 800 *quintillions de siècles!*

IX.

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}$$
$$=\pm\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{1.2\ldots p}\ (^*).$$

X. THÉORÈME. — 1° *Les combinaisons de* $2n$ *lettres, prises* n *à* n, *sont toujours en nombre pair;*

2° *Ce nombre pair est divisible par* $n+1$ *et par* $2n-1$.

XI. THÉORÈME. — 1° $\frac{N}{D}$ *étant la fraction irréductible équivalente à*

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)}{1.2.3\ldots a\times 1.2.3\ldots b}=C,$$

le dénominateur D *divise* a *et* b;

2° C *se réduit à un nombre entier, si* a *et* b *sont premiers entre eux.*

XII. *Si* a *et* b *sont premiers entre eux,*

$$\frac{1.2.3\ldots(2a)\times 1.2.3\ldots(2b)}{1.2.3\ldots a\times 1.2.3\ldots b\times 1.2.3\ldots(a+b)}=\textit{entier}\ (^{**}).$$

(*) Formule de M. *Genocchi.* (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 132.)

(**) Les trois dernières questions appartiennent plutôt à la *théorie des nombres* qu'à la théorie des combinaisons.

CHAPITRE III.

FORMULE DU BINÔME.

46. Afin de découvrir la formule qui donne le développement de la puissance $m^{ième}$ d'un binôme $x+a$, m étant supposé entier et positif, cherchons d'abord à ordonner, suivant les puissances descendantes de x, le produit P des m binômes

$$x+a,\quad x+b,\quad x+c,\ldots,x+k,\quad x+l.$$

A cet effet, observons que si l'on multipliait $x+a$ par $x+b$, puis le produit par $x+c$, etc., et *qu'on ne fît aucune réduction, un terme quelconque de* P *serait égal au produit de* m *facteurs, pris respectivement dans les* m *binômes donnés.*

Conséquemment :

1° Le premier terme de P est x^m;

2° Pour former un terme contenant x^{m-1}, on doit prendre le premier terme x dans $m-1$ des binômes; et, dans le binôme restant, prendre le second terme : le coefficient de x^{m-1} est donc la somme S_1 des seconds termes des binômes;

3° Pour obtenir un terme contenant x^{m-2}, on doit, dans $m-2$ des binômes, prendre le premier terme x; et, dans les deux binômes restants, prendre le second terme : le coefficient de x^{m-2} égale donc la somme S_2 des produits deux à deux des seconds termes des binômes; etc.

4° En général, *le coefficient de* x^{m-p} *est égal à la somme* S_p *des produits* p *à* p *des seconds termes;*

5° Enfin, le dernier terme de P est le produit $abc \dots kl$ des seconds termes, produit que nous représenterons par S_m.

On a donc

$$\left.\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+k)(x+l)\\&\quad = x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \dots + S_p x^{m-p} + \dots + S_m.\end{aligned}\right\} (1)$$

47. Dans la formule (1), supposons

$$b = c = \dots = k = l = a:$$

le premier membre deviendra $(x+a)^m$. En même temps :

1° $S_1 = a + b + c + \dots + k + l$ se réduit au produit de a par le nombre m des seconds termes :

$$S_1 = \frac{m}{1} a;$$

2° $S_2 = ab + ac + \dots bc + \dots + kl$ se réduit au produit de a^2 par le nombre des combinaisons deux à deux des lettres $a, b, c, \dots, k, l$:

$$S_2 = \frac{m(m-1)}{1.2} a^2;$$

etc.

3° En général, S_p se réduit au produit de a^p par le nombre des produits p à p ou par le nombre des combinaisons, p à p, des lettres $a, b, c, \dots, k, l$:

$$S_p = C_{m,p} \cdot a^p;$$

4° Enfin,

$$S_m = a^m.$$

Par suite :

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \dots + C_{m,p} a^p x^{m-p} + \dots + a^m. \quad (2)$$

Telle est la *formule du binôme,* due à Newton (*).

(*) Ou plutôt à Pascal (*Nouvelles Annales de Mathém.*; juin 1869).

48. *Remarques.* — I. Le développement de $(x+a)^m$ est homogène et du degré m : ce résultat est dû à l'homogénéité du binôme $(x+a)$ (*).

II. Le développement contient $m+1$ termes.

III. *Le terme qui en a* p *avant lui,* que l'on appelle *terme général,* a pour expression

$$T_{p+1} = C_{m,p} a^p x^{m-p} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p} a^p x^{m-p}. \quad (3)$$

IV. *Les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux.*

Le coefficient de T_{p+1} est $C_{m,p}$. Mais, le nombre des termes étant $m+1$, *le terme qui en a* p *après lui en a* m — p *avant lui;* son coefficient a donc pour valeur $C_{m,m-p}$, ou $C_{m,p}$ (**34**, II).

V. Pour les applications, il est commode de rendre le premier terme du binôme égal à l'unité. Or

$$(x+a)^m = x^m \left(1 + \frac{a}{x}\right)^m = x^m (1+z)^m,$$

pourvu que

$$z = \frac{a}{x}.$$

D'ailleurs, comme une puissance quelconque de l'unité est égale à l'unité,

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1} z + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \cdots \quad (4)$$

Cette nouvelle formule subsiste quel que soit m, *pourvu*

(*) Il n'y a pas lieu d'ajouter, comme on le fait quelquefois, que *les exposants de* x *vont en diminuant, et ceux de* a, *en augmentant;* car on s'était proposé de développer $(x+a)^m$ suivant les puissances décroissantes de x.

que la variable z *soit comprise entre* + 1 *et* — 1. Cette proposition, dont on verra plus tard la démonstration, doit être entendue ainsi :

Le second membre de l'équation (4), *composé d'un nombre limité de termes quand* m *est entier positif, devient une série dans tous les autres cas. Si* z *est compris entre* + 1 *et* — 1, *cette série est convergente et a pour somme* $(1+z)^m$.

49. *Formation des termes.* — La formule (3) donne

$$T_{p+2}=\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{1.2.3\ldots(p+1)}a^{p+1}x^{m-p-1}=T_{p+1}\frac{m-p}{p+1}\frac{a}{x}. \quad (5)$$

Par conséquent, *pour passer d'un terme au terme suivant, on multiplie le coefficient par l'exposant de* x ; *on le divise par l'exposant de* a *augmenté d'une unité; on augmente d'une unité l'exposant de* a *et l'on diminue d'une unité l'exposant de* x.

Appliquons cette règle au développement de $(x+a)^9$. Nous aurons, successivement,

$$x^9,\quad \frac{9}{1}ax^8,\quad 9.\frac{8}{2}a^2x^7=36a^2x^7,\quad 36.\frac{7}{3}a^3x^6=84a^3x^6,$$

$$84.\frac{6}{4}a^4x^5=126a^4x^5,\ \text{etc.};$$

et enfin

$$(x+a)^9=x^9+9ax^8+36a^2x^7+84a^3x^6+126a^4x^5$$
$$+126a^5x^4+84a^6x^3+36a^7x^2+9a^8x+a^9.$$

50. *Rang du terme qui a le plus grand coefficient.* — Représentons par C_{p+1} le coefficient du terme de rang $p+1$; nous aurons, à cause de la formule (5),

$$C_{p+2}=\frac{m-p}{p+1}C_{p+1}. \quad (6)$$

Pour de petites valeurs de p, la fraction $\frac{m-p}{p+1}$ surpasse l'unité; donc $C_{p+2} > C_{p+1}$: *les coefficients vont d'abord en augmentant.* Cette augmentation cesse dès que le facteur $\frac{m-p}{p+1}$ devient égal ou inférieur à l'unité. Par conséquent, *le rang du plus grand coefficient est égal à la plus petite valeur de* $p+1$ *qui vérifie la relation* $\frac{m-p}{p+1} \leqq 1$.

Elle donne

$$p+1 \geqq \frac{m+1}{2}.$$

Donc, 1° *si* m *est impair, le rang du plus grand coefficient est*

$$p+1 = \frac{m+1}{2};$$

2° *si* m *est pair, le rang du plus grand coefficient est*

$$p+1 = \frac{m}{2} + 1.$$

Dans le premier cas, le développement a un nombre pair de termes; et comme $p+1 = \frac{m+1}{2}$ suppose

$$\frac{m-p}{p+1} = 1,$$

il y a deux termes du milieu, dont les coefficients, plus grands que tous les autres, sont égaux entre eux.

Dans le second cas, *le terme du milieu,* de rang

$$p+1 = \frac{m}{2} + 1,$$

a le plus grand coefficient.

51. *Développement de* $(x-a)^m$.—Si, dans la formule (1), on change a en $-a$, on obtient

$$(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1} a x^{m-1} + \cdots + (-1)^p C_{m,p} a^p x^{m-p} + \cdots + (-a)^m. \quad (7)$$

52. *Remarques.* — I. Dans les formules (1) et (5), faisons $x = a = 1$; nous aurons

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \cdots + C_{m,p} + \cdots + 1,$$

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \cdots + (-1)^p C_{m,p} + (-1)^m.$$

Par conséquent,

1° *La somme des coefficients du développement de* $(x+a)^m$ *égale* 2^m ;

2° *La somme des coefficients de rang pair est égale à la somme des coefficients de rang impair* (*).

II. Si l'on représente par P *la somme des nombres de combinaisons de* m *lettres prises en nombre pair,* et par I *la somme des nombres de combinaisons de ces* m *lettres prises en nombre impair,* on aura, en se rappelant que $C_{m,0} = 1$ *n'est pas un nombre de combinaisons* (**40**),

$$P + I = 2^m - 1, \quad I - P = 1;$$

d'où

$$I = 2^{m-1}, \qquad P = 2^{m-1} - 1 \text{ (**)}.$$

Exercices.

I. Trouver le coefficient de x^k dans le développement de

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^p.$$

En conclure le nombre de manière de *former une somme* s, *par le jet de* p *dés à* m *faces.* (On admettra la formule du binôme pour le cas de l'exposant entier négatif.)

(*) Le triangle arithmétique conduit aux mêmes conséquences.

(**) Ces dernières valeurs donnent lieu à une remarque assez curieuse : *au jeu de pair ou non, il y a avantage à parier pour impair.*

II. Quel est le nombre des solutions entières, positives, de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 37\ ?$$

Réponse : 376 992.

III. Vérifier la relation

$$x + x^2 + x^4 + x^8 + \cdots = \frac{x}{1-x} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} - \frac{x^7}{1-x^7} - \frac{x^{11}}{1-x^{11}}$$
$$- \frac{x^{13}}{1-x^{13}} + \frac{x^{15}}{1-x^{15}} - \frac{x^{17}}{1-x^{17}} - \frac{x^{19}}{1-x^{19}} + \frac{x^{21}}{1-x^{21}} - \frac{x^{23}}{1-x^{23}} - \frac{x^{29}}{1-x^{29}} + \cdots \text{ (*)}$$

IV. Développer, en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, la fonction

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-3^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \cdots$$

Quel sera le coefficient de x^n ? La série est-elle convergente ? ($1 > x > 0$).

V. Démontrer la formule

$$C_{m+m'+n-1,n} = \sum_0^n (C_{m+i-1,i} \times C_{m'+n-i-1,n-i}),$$

dans laquelle i est une variable qui reçoit les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., n.

VI. Démontrer la relation

$$\sum_0^p C_{m,i} \times C_{m',p-i} = C_{m+m',p}.$$

(*) La variable x est comprise entre -1 et $+1$. Le terme général, dans le second membre, étant représenté par $\pm \frac{x^n}{1-x^n}$, les facteurs premiers de n sont *impairs* et *inégaux* : le signe $+$ répond au cas où ces facteurs sont en nombre *pair*.

VII. Démontrer que les deux sommes

$$\sum_0^p C_{m-i,\,m-p} \times C_{m'+i+1,\,p'},$$

$$\sum_0^{p'} C_{m'-i,\,m'-p'} \times C_{m+i+1,\,p}$$

sont équivalentes.

VIII. Démontrer la relation

$$\sum_0^n C_{2i,\,i} \times C_{2n-2i,\,n-i} = 2^{2n}.$$

IX. Démontrer que

$$C_{p,\,n} \times C_{p-n,\,q-n} = C_{q,\,n} \times C_{p,\,q}.$$

X. THÉORÈME. — *La somme des carrés des coefficients du développement de* $(x+a)^m$ *égale le nombre des combinaisons de* $2m$ *lettres, prises* m *à* m.

XI. *Dans le développement de* $(1+x)^{2m}$, *la somme des carrés des coefficients, pris avec des signes alternés, égale, en valeur absolue, le plus grand de ces coefficients.*

XII. Prouver que

$$(m+1)(m+2)\ldots(2m) = 2.6.10.14\ldots(4m-2) \; (*).$$

XIII. Quelles sont les valeurs des *inconnues* a, b, c qui rendent identique l'égalité

$$a(a+b)\ldots(a+\overline{m-1}\,b) = (c+m+1)(c+m+2)\ldots(c+2m),$$

m étant un nombre entier quelconque?

Réponse :

$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = 0.$$

(*) La question suivante montre combien cette égalité est remarquable.

XIV. Trouver la somme des produits deux à deux et la somme des produits trois à trois des n premiers nombres entiers. (On suppose que, dans chaque produit, les facteurs sont inégaux.)

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS DE LA FORMULE DU BINÔME.

Quelques séries.

53. La formule

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}z^3 + \cdots \quad (1)$$

subsiste, avons-nous dit (**48**, V), pour toute valeur de m, pourvu que la variable z soit comprise entre $+1$ et -1. Admettant ce théorème, dont la démonstration sera donnée dans le *Calcul différentiel*, appliquons-le à quelques cas particuliers remarquables.

54. En premier lieu, si $m = -p$, p étant *entier positif*, l'égalité (1) devient

$$(1+z)^{-p} = \frac{1}{(1+z)^p} = 1 - \frac{p}{1}z + \frac{p(p+1)}{1.2}z^2 - \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}z^3 + \cdots; \quad (2)$$

et, par le changement de z en $-z$:

$$(1-z)^{-p} = \frac{1}{(1-z)^p} = 1 + \frac{p}{1}z + \frac{p(p+1)}{1.2}z^2 + \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}z^3 + \cdots \quad (3)$$

Par exemple :

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots, \qquad (4)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \qquad (5)$$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + 5z^4 - \cdots, \qquad (6)$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \cdots, \qquad (7)$$

$$\frac{1}{(1+z)^3} = 1 - 3z + 6z^2 - 10z^3 + \cdots, \qquad (8)$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = 1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + \cdots \qquad (9)$$

etc.

55. *Remarques.* — **I.** Dans la formule (3), *le coefficient de* z^n *est égal au nombre des combinaisons complètes de* p *lettres, prises* n *à* n (**39**).

II. Les formules (4), (5), démontrées dans les éléments, donnent la *limite de la somme des termes d'une progression par quotient, décroissante.*

III. La série (7), convergente si z est une fraction proprement dite, a pour coefficients les nombres naturels. La comparaison avec la formule (5) prouve que

$$[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots]^2 = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \cdots \qquad (10)$$

En effet, si l'on multiplie par elle-même la progression (5), en observant les règles de la multiplication des polynômes, on trouve la série (7).

IV. Si, à l'exemple des anciens géomètres, on admettait les séries non convergentes, on arriverait à des résultats

paradoxaux ou absurdes, parmi lesquels nous indiquerons seulement ceux-ci :

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots,$$

$$\frac{1}{4} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots,$$

$$\frac{1}{8} = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - \cdots,$$

que l'on trouve en faisant $z = 1$ dans les relations (4), (6), (8) (*).

56. Quand l'exposant m est fractionnaire, il est commode, pour appliquer la formule (**52**), de calculer les différences

$$m - 1, \quad m - 2, \quad m - 3, \ldots$$

puis les rapports

$$\frac{m-1}{2}, \quad \frac{m-2}{3}, \quad \frac{m-3}{4}, \ldots$$

Soient, par exemple,

$$m = \frac{1}{2}, \quad m = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{3}, \quad m = -\frac{p}{q};$$

les calculs se disposent comme il suit :

$$1^\circ \quad m = \frac{1}{2}, \; m - 1 = -\frac{1}{2}, \; m - 2 = -\frac{3}{2}, \; m - 3 = -\frac{5}{2}, \ldots;$$

$$\frac{m-1}{2} = -\frac{1}{4}, \; \frac{m-2}{3} = -\frac{3}{6}, \; \frac{m-3}{4} = -\frac{5}{8}, \ldots;$$

(*) Nous avons déjà cité les deux premiers (**8**).

donc

$$(1+z)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2.4}z^2+\frac{1.3}{2.4.6}z^3-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}z^4+\cdots \quad (11)$$

2° $m=-\frac{1}{2}$, $m-1=-\frac{3}{2}$, $m-2=-\frac{5}{2}$, $m-3=-\frac{7}{2}$,...;

$$\frac{m-1}{2}=-\frac{3}{4},\ \frac{m-2}{3}=-\frac{5}{6},\ \frac{m-3}{4}=-\frac{7}{8},\ldots;$$

$$(1+z)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}z+\frac{1.3}{2.4}z^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}z^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}z^4-\cdots \quad (12)$$

3° $m=\frac{1}{3}$, $m-1=-\frac{2}{3}$, $m-2=-\frac{5}{3}$, $m-3=-\frac{8}{3}$,...;

$$\frac{m-1}{2}=-\frac{2}{6},\ \frac{m-2}{3}=-\frac{5}{9},\ \frac{m-3}{4}=-\frac{8}{12},\ldots;$$

$$(1+z)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}z-\frac{2}{3.6}z^2+\frac{2.5}{3.6.9}z^3-\frac{2.5.8}{3.6.9.12}z^4+\cdots \quad (13)$$

4° $m=-\frac{p}{q}$, $m-1=-\frac{p+q}{q}$, $m-2=-\frac{p+2q}{q}$, $m-3=-\frac{p+3q}{q}$,...;

$$\frac{m-1}{2}=-\frac{p+q}{2q},\ \frac{m-2}{3}=-\frac{p+2q}{3q},\ \frac{m-3}{4}=-\frac{p+3q}{4q},\ldots;$$

$$(1+z)^{-\frac{p}{q}}=1-\frac{p}{1}\frac{z}{q}+\frac{p(p+q)}{1.2}\left(\frac{z}{q}\right)^2-\frac{p(p+q)(p+2q)}{1.2.3}\left(\frac{z}{q}\right)^3+\cdots; \quad (14)$$

$$(1-z)^{-\frac{p}{q}}=1-\frac{p}{1}\frac{z}{q}+\frac{p(p+q)}{1.2}\left(\frac{z}{q}\right)^2+\frac{p(p+q)(p+2q)}{1.2.3}\left(\frac{z}{q}\right)^3+\cdots \quad (15)$$

Extraction des racines numériques.

57. Les formules (11) et (13) se prêtent facilement au calcul des racines des nombres. Si, par exemple, on veut calculer, avec une grande approximation, la racine carrée d'un nombre entier N, on commencera par chercher la partie

entière a de cette racine; de manière que $N=a^2+x$, x étant moindre que a^2. On aura donc

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+x}=a\sqrt{1+\frac{x}{a^2}}=a\left(1+\frac{x}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

puis, par la formule (11), dans laquelle $z=\frac{x}{a^2}$:

$$\sqrt{N}=a+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{8a^3}+\frac{x^3}{16a^5}-\frac{5x^4}{128a^7}+\cdots \qquad (16)$$

Si la fraction $\frac{x}{a}$ est fort petite, la série sera très-convergente. De plus, les termes étant alternativement positifs et négatifs, les résultats sont, alternativement aussi, trop petits et trop grands (**21**); et l'on connaît, à chaque fois, une limite de l'erreur commise (*).

58. *Application.* — Soit $N=103$; d'où résulte $a=10$, $x=3$, puis

$$\sqrt{103}=10+\frac{3}{20}-\frac{9}{8\,000}+\frac{27}{1\,600\,000}-\frac{405}{1\,280\,000\,000}+\cdots$$

Réduisant en décimales, on trouve

$\sqrt{103}<10{,}15$, $\sqrt{103}>10{,}148\,875$, $\sqrt{103}<10{,}148\,891\,8$, $\sqrt{103}>10{,}148\,891\,5$;

(*) L'inégalité

$$\sqrt{N}<a+\frac{x}{2a}$$

devient, si l'on y remplace x par $N-a^2$:

$$\sqrt{N}<\frac{a^2+N}{2a};$$

ou enfin

$$\sqrt{N}<\frac{1}{2}\left(a+\frac{N}{a}\right).$$

Ainsi, *la moyenne géométrique, entre* a *et* $\frac{N}{a}$, *est plus petite que la moyenne arithmétique entre ces nombres;* théorème connu. En outre, la différence entre les deux moyennes est inférieure à $\frac{x^2}{8a^3}$ (**21**).

donc, à moins de 0,000 001,

$$\sqrt{103} = 10,148\,891.$$

59. Lorsque N est un petit nombre, tel que 2, 3, 5, la série (16) devient divergente ou peu convergente. Dans ce cas, on multiplie N par un carré k^2; et, au lieu de calculer directement $\sqrt{N}$, on développe $k\sqrt{N}$.

Par exemple,

$$\sqrt{3} = \frac{1}{7}\sqrt{3.49} = \frac{1}{7}\sqrt{147}.$$

Prenant $a = 12$, on a $x = 3$; donc

$$\sqrt{3} = \frac{1}{7}\left[12 + \frac{1}{8} - \frac{1}{1\,536} + \frac{1}{147\,456} - \cdots\right],$$

ou

$$\sqrt{3} = 1,732\,049\,7.$$

60. Au lieu d'opérer comme nous venons de l'indiquer, on peut réduire la série (16) à ses deux ou trois premiers termes, et appliquer plusieurs fois la formule ainsi obtenue. Si l'on conserve les trois premiers termes, on aura donc

$$N = a^2 + x = a'^2 + x' = a''^2 + x'' = \cdots, \tag{17}$$

puis

$$\left.\begin{aligned} a' &= a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3}, \\ a'' &= a' + \frac{x'}{2a'} - \frac{x'^2}{8a'^3}, \\ a''' &= a'' + \frac{x''}{2a''} - \frac{x''^2}{8a''^3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

et les quantités a', a'', a''', ... approcheront indéfiniment de $\sqrt{N}$ (*).

61. *Application.* — Soient, comme ci-dessus : $N = 103$, $a = 10$, $x = 3$. Les formules (17), (18) donnent

$$a' = 10 + \frac{3}{20} - \frac{9}{8\,000} = 10,148\,875, \quad x' = 0,000\,336\,234...$$

$$a'' = 10,148\,875 + \frac{0,000\,336\,234}{20,297\,750} - \frac{0,000\,000\,113\,053...}{8\,362,645\,719..}$$

$$= 10,148\,875 + 0,000\,016\,565\,0 - 0,000\,000\,000\,0$$

$$= 10,148\,891\,565; \text{ etc.}$$

62. *Remarque.* — La théorie des *fractions continues* (**), combinée avec l'un des procédés ci-dessus (**59**), conduit à un résultat remarquable.

Supposons que l'équation

$$Nx^2 - y^2 = 1$$

soit vérifiée par des valeurs *entières* de x et de y ; savoir : $x = a$, $y = b$. Comme le développement de $\sqrt{b^2 + 1}$, en fraction continue, est

$$b + \cfrac{1}{2b + \cfrac{1}{2b + \cdots\cdots}},$$

$$a\sqrt{N} = b + \cfrac{1}{2b + \cfrac{1}{2b + \cdots\cdots}}$$

(*) Ce procédé appartient à la *méthode des approximations successives*, dont il sera question plus loin. Quand on l'applique en réduisant la série à ses deux premiers termes, on retombe sur la règle qui consiste à *diviser le reste par le double de la partie déjà trouvée.*

(**) Voir, par exemple, nos *Mélanges mathématiques.*

Si, de plus, $N = c^2 + 1$, on aura cette *relation entre deux fractions périodiques :*

$$b + \cfrac{1}{2b + \cfrac{1}{2b + \cdots\cdots}} = a\left[c + \cfrac{1}{2c + \cfrac{1}{2c + \cdots\cdots}}\right].$$

Soit, par exemple, $c = 1$: on trouve

$$7 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{14 + \cdots\cdots}} = 5\left[1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots\cdots\cdots}}\right],$$

$$41 + \cfrac{1}{82 + \cfrac{1}{82 + \cdots\cdots}} = 29\left[1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots\cdots\cdots}}\right],$$

$$169 + \cfrac{1}{338 + \cfrac{1}{338 + \cdots\cdots}} = 239\left[1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots\cdots\cdots}}\right],$$

etc.

Limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$.

62. Si, dans $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, on fait croître indéfiniment l'exposant m, la quantité $1 + \frac{1}{m}$ diminue et tend vers l'unité. On ne peut donc, *a priori*, savoir si sa puissance $m^{ième}$ augmente ou diminue. Nous allons prouver que *cette puissance,* c'est-à-dire $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, *a pour limite le nombre incommensurable* e (**22**).

La démonstration de cet important théorème est fondée sur les propositions suivantes :

64. LEMME I. — *La limite d'une somme est égale à la somme des limites des parties qui la composent* (*).

LEMME II. — $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ *étant des fractions proprement dites, le produit*

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\ldots(1-\lambda),$$

évidemment inférieur à 1, *surpasse* $1-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)$.

Si le nombre des facteurs se réduit à deux, on a

$$(1-\alpha)(1-\beta)=1-\alpha-\beta+\alpha\beta;$$

et, comme $\alpha\beta$ est une quantité *positive* :

$$(1-\alpha)(1-\beta)>1-\alpha-\beta.$$

Pour passer au cas de trois facteurs, multiplions les deux membres par la quantité *positive* $1-\gamma$; nous aurons

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)>1-\alpha-\beta-\gamma+(\alpha+\beta)\gamma;$$

et, à plus forte raison,

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)>1-\alpha-\beta-\gamma.$$

A son tour, cette inégalité donnerait

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)>1-\alpha-\beta-\gamma-\delta+(\alpha+\beta+\gamma)\delta;$$

puis, à plus forte raison,

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)>1-\alpha-\beta-\gamma-\delta;$$

etc.

(*) Ce lemme, ou plutôt cette *définition*, suppose que le nombre des parties est *constant*.

Lemme III. — *Le produit*

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right) \qquad (1)$$

dans lequel p *est quelconque, mais constant, converge vers* 1, *quand* m *croît indéfiniment* (*).

D'après le Lemme II, le produit

$$P=\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)$$

est compris entre 1 et

$$1-\frac{1+2+3+\cdots+\overline{p-1}}{m}=1-\frac{p(p-1)}{2m}.$$

Cette dernière fraction tend indéfiniment vers zéro lorsque m augmente; donc $\lim P=1$.

65. En supposant d'abord m entier positif, nous avons, par la formule du binôme (**46**) :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2}+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\frac{1}{m^p}+\cdots+\frac{1}{m^m},$$

ou

$$\left.\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2\ldots3}+\cdots\\ +\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots p}+\cdots+\frac{1}{m^m}.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(*) Par exemple, le produit

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{10\,000}{m}\right),$$

composé de dix mille facteurs, tend vers 1 si le dénominateur m, supposé plus grand que 10 000, croît sans cesse.

Prenons (28)

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots p} + \cdots :$$

il résulte, de la démonstration précédente, que les termes du premier développement, inférieurs à ceux qui y correspondent dans le second, ont pour limites respectives ceux-ci.

Représentons par S_{p+1} la somme des $p+1$ premiers termes de e, et par R le *reste*. De même, soit S'_{p+1} la somme des $p+1$ premiers termes de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, R′ étant le reste. Nous aurons

$$e = S_{p+1} + R, \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = S'_{p+1} + R',$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < e, \quad S'_{p+1} < S_{p+1}, \quad R' < R;$$

puis, par la démonstration ci-dessus,

$$\lim S'_{p+1} = S_{p+1}.$$

Ces diverses relations donnent

$$e - \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = R - \lim R'. \tag{3}$$

Dans cette nouvelle égalité, dont le second membre est *indépendant de* m, faisons croître p. Le reste R diminuera indéfiniment, et il en sera de même, à plus forte raison, pour la quantité lim R′, qui ne peut surpasser R. D'ailleurs, le *premier membre est une constante* (*); donc cette constante est nulle; et, finalement

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e. \tag{4}$$

(*) En effet, ce premier membre est *indépendant de* m.

66. *Remarque.* — D'après les égalités (3), (4), on a, *quel que soit* p :

$$\lim \left[\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p}{m}\right)}{1.2.3\ldots(p+1)} + \cdots + \frac{1}{m^m} \right]$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(p+1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots(p+2)} + \cdots$$

67. Dans ce qui précède, nous avons supposé *m entier positif.* Si ce nombre est *fractionnaire positif,* il sera compris entre deux entiers consécutifs n, $n+1$; et l'on aura

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

ou

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Mais, n étant un *nombre entier,*

$$\lim \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = e,$$

$$\lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n . \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = e;$$

donc

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Enfin, si $m = -m'$, m' étant *positif, entier ou fractionnaire* :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{m'}\right)^{-m'} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{m'}\right)^{m'}}$$

$$= \left(\frac{m'}{m'-1}\right)^{m'} = \left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'}$$

$$= \left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'-1} \cdot \left(1+\frac{1}{m'-1}\right).$$

Conséquemment

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \lim\left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'-1} . \lim\left(1+\frac{1}{m'-1}\right).$$

D'après les deux premiers cas,

$$\lim\left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'-1} = e;$$

donc enfin

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Sommation des puissances semblables des termes d'une progression par différence.

68. Soient n nombres en progression par différence :

$$a, b, c, \ldots, k, l.$$

Désignant par δ la *raison,* on aura

$$b^{p+1} = (a+\delta)^{p+1}$$

$$= a^{p+1} + \frac{p+1}{1} a^p\delta + \frac{p+1}{1}\frac{p}{2} a^{p-1}\delta^2 + \cdots + \frac{p+1}{1} a\delta^p + \delta^{p+1},$$

$$c^{p+1} = b^{p+1} + \frac{p+1}{1} b^p\delta + \cdots + \frac{p+1}{1} b\delta^p + \delta^{p+1},$$

. . . .

$$l^{p+1} = k^{p+1} + \frac{p+1}{1} k^p\delta + \cdots + \frac{p+1}{1} k\delta^p + \delta^{p+1},$$

$$(l+\delta)^{p+1} = l^{p+1} + \frac{p+1}{1} l^p\delta + \cdots + \frac{p+1}{1} l\delta^p + \delta^{p+1};$$

puis, en faisant la somme des seconds membres, et ayant égard à quelques réductions,

$$\left.\begin{aligned}(l+\delta)^{p+1} = a^{p+1} + \frac{p+1}{1} S_p\delta + \frac{p+1}{1}\frac{p}{2} S_{p-1}\delta^2 + \cdots \\ + \frac{p+1}{1} S_1\delta^p + n\delta^{p+1}.\end{aligned}\right\} (1)$$

Dans cette relation générale, S_p représente la somme des puissances p des termes de la progression. De même, S_{p-1} est la somme de leurs puissances $p-1$; etc. Il est évident que la formule donne S_p quand on connaît S_{p-1}, S_{p-2}, ... S_1.

69. Considérons le cas particulier où les termes de la progression sont les nombres naturels 1, 2, 3, ..., n. Alors l'égalité (1) se réduit à

$$(n+1)\left[(n+1)^p - 1\right] = \frac{p+1}{1} S_p + \frac{p+1}{1}\frac{p}{2} S_{p-1} + \cdots + \frac{p+1}{1} S_1. \quad (2)$$

Si l'on suppose successivement $p = 1, 2, 3, 4$, on trouve

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (3)$$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (4)$$

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad (5)$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

$$S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

$$S_6 = \frac{n(n+1)(6n^5+15n^4+6n^3-6n^2-n+1)}{42} \text{ (*)},$$

etc.

70. *Remarques.* — I. La formule (3), qui donne la somme des n premiers nombres entiers, est connue par les éléments d'algèbre.

II. Dans la formule (4), qui donne *la somme des carrés des nombres naturels, le troisième facteur est égal à la somme des deux premiers.*

III. La formule (5) nous apprend que *la somme des cubes des* n *premiers nombres entiers est égale au carré de la somme de ces nombres.*

(*) Les calculs se compliquent si rapidement, qu'il est déjà difficile de déterminer, par cette voie, la valeur de S_8. Au moyen d'autres considérations, on trouve, soit la formule

$$S_p = \frac{1}{p+1} A_{n+1,p+1} + \frac{B_p}{p} A_{n+1,p} + \frac{C_p}{p-1} A_{n+1,p-1} + \cdots + \frac{L_p}{3} A_{n+1,3} + \frac{1}{2} A_{n+1,2},$$

dans laquelle B_p, C_p, ..., L_p sont des coefficients qui suivent une loi fort simple (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, juin 1856); soit

$$S_p = C_{p+n,p+1} + A_p C_{p+n-1,p+1} + B_p C_{p+n-2,p+1} + \cdots + C_{n+1,p+1};$$

A_p, B_p, C_p, ... étant des *nombres entiers*. Par exemple,

$$S_2 = C_{n+2,3} + C_{n+1,3},$$

$$S_3 = C_{n+3,4} + 4C_{n+2,4} + C_{n+1,4},$$

$$S_4 = C_{n+4,5} + 11C_{n+3,5} + 11C_{n+2,5} + C_{n+1,5},$$

. . . .

IV. De

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

ou

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{1.2}\right]^2,$$

on conclut

$$n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{1.2}\right]^2 - \left[\frac{(n-1)n}{1.2}\right]^2.$$

Ainsi, *tout cube est la différence de deux carrés.* En outre, *un des carrés, au moins, est divisible par* 9.

V. Chacune des quantités S_p étant un nombre entier, le dénominateur de la fraction qui représente S_p doit diviser le numérateur correspondant. Par exemple, *le produit*

$$n(n+1)(6n^5 + 15n^4 + 6n^3 - 6n^2 - n + 1)$$

est toujours divisible par 42. Nous engageons le lecteur à essayer la démonstration directe.

Sommation des piles de boulets.

71. *Pile à base carrée.* — Elle a la forme d'une *pyramide quadrangulaire régulière.* La *base* de la pyramide, ou la première *couche* de la pile, se compose de boulets rangés en carré. Si n est le nombre des boulets formant le côté du carré, cette première couche contient n^2 boulets. Il est facile de voir que les couches suivantes renferment $(n-1)^2$ boulets, $(n-2)^2$ boulets, etc. Enfin, le *sommet* de la pyramide est formé par un seul boulet. Conséquemment, le nombre des boulets contenus dans la pile est

$$N = n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1,$$

ou

$$N = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

72. *Pile triangulaire.*—Sa forme est celle d'un *tétraèdre régulier* (*). Les couches successives sont des triangles *équilatéraux*, dont les côtés renferment n boulets, $(n-1)$ boulets, ... et, enfin, un seul boulet. Cela posé, le nombre des boulets contenus dans la première couche étant

$$n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{(n+1)n}{1.2},$$

la somme cherchée sera

$$N = C_{n+1,2} + C_{n,2} + C_{n-1,2} + \cdots + C_{2,2};$$

ou (**45**, 5°)

$$N=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

73. *Remarque.* — Ce résultat est une conséquence des formules (3), (4). Observons d'abord que

$$N=\sum_1^{n+1}\frac{i(i-1)}{1.2}.$$

D'un autre côté, *pour trouver la somme de plusieurs polynômes, on peut ajouter les termes de même degré, et réunir les sommes partielles;* donc

$$N=\frac{1}{2}\sum_1^{n+1}i^2-\frac{1}{2}\sum_1^{n+1}i$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-\frac{(n+1)(n+2)}{4}\right],$$

ou

$$N=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

(*) Il existe un rapport, assez simple, entre la partie *pleine* et la partie *vide* du tétraèdre. (Voyez *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, 4me édit., p. 396.)

74. *Pile à base rectangulaire.* — Les couches de cette pile, qui a la forme d'un *comble à quatre pentes*, sont formées par des boulets rangés en rectangle. Si n et $n+p$ sont les nombres de boulets contenus dans les côtés de la base, le nombre total des boulets qui la constituent est $n(n+p)$. La deuxième couche contient $(n-1)(n-1+p)$ boulets ; et ainsi de suite. Enfin, la $n^{\text{ième}}$ couche est une simple *file*, contenant $p+1$ boulets.

Par conséquent,

$$N = n(n+p) + (n-1)(n-1+p) + \cdots + 1(1+p)$$
$$= n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 1^2 + p\left[n + (n-1) + \cdots + 1\right],$$

ou enfin

$$N = \frac{n(n+1)}{6}[2n + 3p + 1].$$

75. *Remarques.* — I. Cette dernière formule résulte, immédiatement, de ce que *la pile proposée est décomposable en une pile à base carrée et en un prisme triangulaire.*

II. La méthode employée dans le n° 73 est souvent applicable. Proposons-nous, par exemple, de *trouver la somme* S *des valeurs de la fonction* $i(i-1)(2i+1)$, i *devenant égal à* 1, 2, 3, ... n. Nous aurons

$$S = \sum_1^n i(i-1)(2i+1) = 2\sum_1^n i^3 - \sum_1^n i^2 - \sum_1^n i;$$

ou, par les formules (3), (4), (5) :

$$S = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2},$$

ou encore

$$S = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)(3n+4).$$

III. En observant que

$$i(i-1)(2i+1)=2(i+1)i(i-1)-i(i-1)=12C_{i+1,3}-2C_{i,2},$$

on a, plus rapidement,

$$S=12\sum_1^n C_{i+1,3}-2\sum_1^n C_{i,2}$$

$$=12\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}-2\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3};$$

etc.

Exercices.

I. Quel est le 25ᵉ terme du développement de $(1-z)^{-\frac{3}{7}}$?
Réponse :

$$\frac{3.10.17.24.31.38.45.52.59.66.73.80.87.94.101.108\ldots164}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16\ldots24}\left(\frac{z}{7}\right)^{24}$$

$$=31.59.73.29.47.101.3.61.43.17.13.25.157.41.\frac{z^{24}}{7^{27}}.$$

II. Théorème. — Si q est un nombre premier, supérieur à p, l'on a, en série *convergente :*

$$\frac{1}{\sqrt[q]{2^p}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{A_n}{q^{n+\alpha_n}}.$$

Dans le second membre : 1° A_n est un *nombre entier;* 2° α_n est *l'exposant de la plus haute puissance de* q *qui divise* 1.2.3...n (*).

(*) Il n'est pas difficile de démontrer que

$$\alpha_n=\mathrm{E}\left(\frac{n}{q}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{n}{q^2}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{n}{q^3}\right)+\cdots;$$

la notation $\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)$ désignant, en général, le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{a}{b}$.

III. Quelle est la somme S des produits que l'on obtient en multipliant, terme à terme, les progressions

$$a,\quad a+\delta,\quad a+2\delta,\ \ldots,\ a+(n-1)\delta,$$
$$a',\quad a'+\delta',\quad a'+2\delta',\ \ldots,\ a'+(n-1)\delta'\,?$$

IV. A quoi se réduit cette somme, lorsque les progressions sont

$$1,\quad 2,\quad 3,\ \ldots\ldots,\ n,$$
$$n,\quad n-1,\quad n-2,\ \ldots\ldots,\ 1\,?$$

Réponse :

$$S = \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}.$$

V. En admettant la formule du binôme pour le cas d'un exposant quelconque, démontrer la *série exponentielle*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

VI. Calculer, au moyen de cette série, la valeur de e^{-5}, à moins de 0,01.

VII. A quoi est égal le terme général u_n de la *série récurrente*

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 8,\quad 13,\ \ldots\ldots,$$

dans laquelle

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\,?$$

Réponse :

$$u_n = \frac{1}{2^n}\left[C_{n+1,1} + 5C_{n+1,3} + 5^2C_{n+1,5} + \cdots\right].$$

VIII. Même question pour la série

$$2,\quad 5,\quad 11,\quad 33,\quad 47,\ \ldots,$$

dans laquelle

$$u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}\,?$$

Réponse :

$$u_n = 3.2^{n-1} - 1.$$

IX. Prouver que

$$\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=1+x\cos\theta+x^2\cos2\theta+x^3\cos3\theta+\cdots+x^n\cos n\theta+\cdots,$$

pour les valeurs de x *comprises entre* -1 et $+1$ (exclusivement).

X. Conclure, de la question précédente, que

$$\cos2\theta+\cos\theta\cos3\theta+\cos^2\theta\cos4\theta+\cdots+\cos^{n-1}\theta\cos(n+1)\theta+\cdots=-1,$$

excepté si $\cos\theta=\pm1$.

XI. Théorème de Nicomaque (*). — *Si, dans la série des nombres impairs :*

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 9,\quad 11,\ldots,$$

on prend le premier terme, puis la somme des deux termes suivants, puis la somme des trois termes suivants, etc., *chacun de ces termes est un cube.*

XII. Théorème. — *Si, dans la suite des nombres naturels :*

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad 10,\quad 11,\quad 12,\ldots,$$

on prend le premier terme, puis la somme des trois termes commençant par 2, *puis la somme des cinq termes commençant par* 3, *puis la somme des sept termes commençant par* 4, *etc.; chacune de ces sommes est un carré.*

XIII. Développer

$$y=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}.$$

La série est-elle convergente pour $x=1$?

XIV. Développer

$$y=\frac{(1+x+x^2+\cdots+x^n)^2}{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}}.$$

(*) Nicomaque de Gérase, Géomètre du premier siècle.

XV. Vérifier que

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots,$$

pour les valeurs de x *comprises entre* — 1 *et* + 1.

XVI. Vérifier que

$$(n+1)^n - \frac{n}{1}\cdot n^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)^n + \cdots \pm 1 = 1.2.3\ldots n.$$

XVII. Théorème. — *Si* b — a *est un nombre entier, et que* a *soit positif,*

$$1 - \frac{b-a}{a+1} + \frac{(b-a)(b-a-1)}{(a+1)(a+2)} - \cdots \pm \frac{(b-a)\ldots 3.2.1}{(a+1)(a+2)\ldots b} = \frac{a}{b}.$$

XVIII. Théorème de M. Liouville. — *Le nombre* e *n'est racine d'aucune équation du second degré, à coefficients rationnels.*

XIX. Binôme d'Abel :

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}a(x+b)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a(a-2b)(x+2b)^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a(a-3b)^2(x+3b)^{m-3} + \cdots$$

XX. Prouver que

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots$$

XXI. Déterminer A, B, C, ... G, de manière que

$$\frac{1 + Ax + Bx^2 + \cdots + Gx^{p-1}}{(1-x)^{p+1}} = 1 + 2^p x + 3^p x^2 + 4^p x^3 + \cdots \text{ (*)}.$$

(*) Voir la note, p. 71.

CHAPITRE V.

THÉORIE DES LOGARITHMES.

Des fonctions.

76. Si deux quantités x, y sont liées par une équation, la quantité x, à laquelle on donne des valeurs arbitraires, est appelée *variable indépendante* : l'autre variable y est dite *fonction de* x. Cette fonction est *explicite* ou *implicite*, suivant que l'équation donnée a la forme $y=f(x)$ ou la forme $F(x, y)=0$, c'est-à-dire suivant que cette équation est ou n'est pas résolue par rapport à y.

77. On donne le nom de fonction *algébrique* à toute fonction explicite dans laquelle les opérations à effectuer sur la variable x sont des *additions*, des *soustractions*, des *multiplications*, des *divisions*, des *formations de puissances* et des *extractions de racines*, en nombre *limité*. Par exemple,

$$y=2x-x^3+\frac{2}{x}-\sqrt[3]{x}$$

est une fonction algébrique.

78. Toute fonction explicite qui n'est pas algébrique est dite *transcendante*. Les fonctions transcendantes les plus simples sont les fonctions *trigonométriques* ou *circulaires*, et la fonction *exponentielle* a^x.

79. Une variable x est *continue* lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur quelconque α à une autre valeur quelconque β sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Une fonction y est *continue depuis* $x=\alpha$ *jusqu'à* $x=\beta$,

quand elle est ***réelle et finie*** pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β, et que, dans cet intervalle, ***elle peut varier par degrés aussi petits qu'on le veut*** (*).

Discussion de la fonction exponentielle.

80. Dans *l'équation exponentielle* $y = a^x$, supposons d'abord la *constante a* plus grande que 1; faisons varier x de $-\infty$ à $+\infty$, et cherchons comment varie y.

1° En donnant à x les valeurs entières 0, 1, 2, 3, ..., nous pourrons former le tableau suivant :

$$\begin{array}{llllll} x=0, & x=1, & x=2, & x=3, & \ldots, & x=+\infty, \\ y=1, & y=a, & y=a^2, & y=a^3, & \ldots, & y=+\infty. \end{array}$$

En effet, $a^0 = 1$, et *les puissances successives d'un nombre supérieur à l'unité peuvent dépasser toute limite* (**).

2° *A toute valeur de* x *correspond une valeur de* y. Il suffit de considérer le cas où x a la forme $\frac{p}{q}$. Or $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ *a une valeur réelle et positive :* cette valeur est ce que nous désignons par y.

(*) S'il est possible de rendre l'accroissement de x assez petit pour que l'accroissement correspondant de y soit, en valeur absolue, inférieur à une quantité quelconque δ, y passera par toutes les valeurs intermédiaires entre celles qui répondent aux valeurs extrêmes de x : la seconde définition ne diffère donc pas essentiellement de la première. Cependant, celle-ci est préférable. Exemple : $y = x(1-x)$. De $x=0$ à $x=1$, y est finie et continue; mais, comme les valeurs de y, qui répondent à ces valeurs extrêmes de x, sont égales entre elles, on ne peut pas dire que la fonction a passé par des valeurs intermédiaires.

(**) L'exposant n étant supposé *entier positif*, on a

$$(1+\alpha)^n = 1 + \frac{n}{1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2 + \cdots$$

Si la quantité α est *positive*, tous les termes du second membre sont posi-

3° *Quand* x *augmente,* y *augmente.* Soient α, $\alpha+h$ deux valeurs attribuées à x, α et h étant des quantités positives ; on aura

$$a^{\alpha+h} > a^{\alpha}.$$

En effet, cette inégalité équivaut à $a^h > 1$, relation évidente en vertu de ce principe : *les puissances et les racines d'un nombre plus grand que* 1 *sont plus grandes que* 1.

4° *La fonction* a^x *est continue.* Pour le faire voir, il suffit, en conservant les notations précédentes, d'assigner une valeur de h vérifiant l'inégalité

$$a^{\alpha+h} - a^{\alpha} < \delta. \qquad (1)$$

L'accroissement h étant nécessairement fort petit, si, comme on le suppose, δ est une fraction, on peut le représenter par $\frac{1}{n}$, n étant un nombre entier inconnu. De cette manière, l'inégalité (1) devient, successivement,

$$a^{\alpha}\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) < \delta,$$

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{\delta}{a^{\alpha}},$$

$$\left(1 + \frac{\delta}{a^{\alpha}}\right)^n > a.$$

tifs ; donc

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha.$$

D'après cette inégalité, pour satisfaire à la condition

$$(1+\alpha)^n > N,$$

N étant un nombre donné, il suffit de rendre

$$(1+n\alpha) \overline{\overline{>}} N;$$

d'où

$$n \overline{\overline{>}} \frac{N-1}{\alpha}.$$

Cette formule, qui démontre la proposition rappelée dans le texte, peut d'ailleurs être obtenue indépendamment de la théorie du binôme. (*Manuel du Baccalauréat ès Sciences*, ALG., 169.)

Or, pour satisfaire à cette dernière relation, il suffit de prendre (*)

$$n \geqq \frac{(a-1)\,a^{\alpha}}{\delta};$$

d'où

$$h \overline{\overline{<}} \frac{\delta}{(a-1)\,a^{\alpha}} \ (^{**}).$$

5° Il résulte, de cette discussion, que x *variant d'une manière continue, de* 0 *à* $+\infty$, $y=a^x$ *varie d'une manière continue, de* 1 *à* $+\infty$.

81. *Remarque.* — Non-seulement *la fonction* a^x finit par dépasser toute limite, mais encore elle *peut être rendue aussi grande qu'on le veut, relativement à l'exposant* x. Pour démontrer cette importante propriété, remplaçons a par $1+\alpha$, et supposons x entier : nous aurons

$$a^x = (1+\alpha)^x = 1 + \frac{x}{1}\alpha + \frac{x(x-1)}{1.2}\alpha^2 + \cdots;$$

et, par conséquent,

$$a^x > 1 + \frac{x}{1}\alpha + \frac{x(x-1)}{1.2}\alpha^2;$$

puis

$$\frac{a^x}{x} > \frac{1}{x} + \alpha + \frac{x-1}{2}\alpha^2.$$

(*) Voyez la note précédente.

(**) Soient, par exemple, $a=10$, $\alpha=2$, $\delta=0{,}001$. On pourra faire $h=\frac{1}{900\,000}$. Par conséquent,

$$100\sqrt[900\,000]{10} - 100 < 0{,}001.$$

Les Tables de logarithmes donneraient

$$h = \frac{1}{23\,026},$$

valeur beaucoup plus satisfaisante que la première.

Le raisonnement employé ci-dessus (**80**, note) prouve que, pour satisfaire à la condition

$$\frac{a^x}{x} > \mathrm{N},$$

il suffit de prendre

$$x \overline{\gtrless} 1 + \frac{2\mathrm{N}}{(a-1)^2}. \qquad (2)$$

Soient, par exemple, $a = 1,1$, $\mathrm{N} = 250$. La formule (2) donne

$$x \overline{\gtrless} 50\,001.$$

Ainsi

$$\frac{(1,1)^{50\,001}}{50\,001} > 250.$$

En effet, le premier membre est (*) exprimé par le nombre 94 822 *suivi de deux mille soixante chiffres.* Ce résultat montre avec quelle prodigieuse rapidité croissent les puissances d'un nombre supérieur à l'unité, même quand ce nombre est moindre que 2; il peut servir à bien faire comprendre la différence qui existe entre la fonction exponentielle et les fonctions purement algébriques (**).

82. Revenant à la discussion de a^x, donnons maintenant à x des valeurs négatives, et soit, à cet effet, $x = -x'$, la nouvelle variable x' étant positive. Nous aurons

$$y = a^{-x'} = \frac{1}{a^{x'}}.$$

D'après ce qui précède, cette fraction croît, d'une manière

(*) Voir plus loin, n° **107**.

(**) On démontre, de la même manière, que *la fonction* a^x *peut être rendue aussi grande qu'on le veut, relativement à une puissance quelconque de* x.

continue, de 0 à + 1, quand x' varie, d'une manière continue, entre $+\infty$ et 0. D'ailleurs, les valeurs de x, correspondant aux valeurs extrêmes de x', sont $-\infty$ et 0. Nous pouvons donc former ce nouveau tableau, contenant les valeurs principales de x et de y :

$$x = -\infty,\quad x = 0,\quad x = 1,\quad x = +\infty,$$
$$y = 0,\quad y = 1,\quad y = a,\quad y = +\infty.$$

En résumé, la constante a étant plus grande que 1, *la fonction* a^x *croît, d'une manière continue, de* 0 *à* $+\infty$, *quand la variable* x *croît, d'une manière continue, de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

83. Si, dans $y = a^x$, on suppose la constante *a positive et moindre que l'unité,* on peut la représenter par $\frac{1}{a'}$. Alors, la fonction y étant *l'inverse* de a'^x, cette fonction passe, d'une manière continue, de $+\infty$ à 0, quand on fait varier x entre $-\infty$ et $+\infty$.

84. On arrive à des résultats complétement différents de ceux qui précèdent, si l'on discute l'équation $y = (-a)^x$, a étant positif. Le lecteur reconnaîtra sans peine que $(-a)^x$ *est une fonction continuellement discontinue* (*). On peut attribuer à x des valeurs se succédant par degrés très-rapprochés, et pour lesquelles, néanmoins, les valeurs correspondantes de y sont alternativement *positives, négatives* et *imaginaires* (**).

(*) Divers géomètres, se fondant sur une difficulté à laquelle donne lieu la *définition* de $(-a)^x$, ont contesté cette proposition.

(**) L'équation

$$y = (-a)^x$$

appartient à *une infinité de points isolés,* répartis sur les deux *logarithmiques* représentées par

$$y = \pm (a^x).$$

Définition algébrique des logarithmes.

85. Dans l'équation $y = a^x$, x peut être regardé comme une fonction de y : on dit alors que x *est le logarithme du nombre* y, dans le *système* dont la *base* est a. Autrement dit : *le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle on doit élever une quantité constante, appelée base, pour reproduire le nombre donné.* Cette définition, on le verra bientôt, s'accorde avec celle qui est donnée dans les éléments.

86. Supposons, comme on le fait ordinairement, la base plus grande que 1. Alors nous conclurons, du tableau ci-dessus (**82**) :

$$\log 0 = -\infty, \quad \log 1 = 0, \quad \log a = 1, \quad \log(+\infty) = +\infty.$$

Ainsi, *dans tout système de logarithmes dont la base surpasse l'unité :*

1° *Le logarithme de l'unité est zéro;* 2° *le logarithme de la base est l'unité;* 3° *le logarithme de zéro est l'infini négatif;* 4° *le logarithme de l'infini positif est l'infini positif* (*).

En outre, d'après la discussion précédente (**80**, **82**) :

5° *Tout nombre a un logarithme;* 6° *Les fractions proprement dites ont pour logarithmes des quantités négatives;* 7° *les quantités négatives n'ont pas de logarithmes réels.*

(*) On ne doit pas oublier que ces dénominations d'*infini positif* et d'*infini négatif* sont employées pour éviter des périphrases. Par exemple, la quatrième remarque pourrait être énoncée ainsi : *on peut toujours trouver un nombre dont le logarithme surpasse une quantité donnée quelconque.* On se tromperait étrangement si, de ce que *le logarithme de l'infini positif est l'infini positif,* on concluait que le logarithme tend à devenir égal au nombre. On va voir, en effet, que *le rapport d'un logarithme au nombre correspondant diminue indéfiniment quand le nombre augmente, et a pour limite zéro.*

87. *Remarque.* — Cette dernière propriété tient à ce que la fonction a^x est toujours positive. Elle subsiste pour toutes les valeurs *positives* de la base a. Il n'y a pas lieu d'examiner le cas où cette constante serait négative, parce qu'alors la fonction a^x deviendrait discontinue (**84**).

88. Ajoutons, pour compléter la discussion précédente, que *le rapport d'un logarithme au nombre correspondant diminue indéfiniment quand ce nombre augmente, et a pour limite zéro.*

Soit, comme précédemment, $a^x = y$, d'où $x = \log y$, et

$$\frac{\log y}{y} = \frac{x}{a^x}.$$

On a vu que le second rapport, inverse de $\frac{a^x}{x}$, tend vers zéro quand x augmente indéfiniment (**81**). Ainsi, la seconde partie de la proposition est démontrée.

Pour la première, nous nous bornerons au cas où $x = \log y = 2, 3, 4, \ldots$ Mais alors l'inégalité à vérifier :

$$\frac{x}{a^x} > \frac{x+1}{a^{x+1}},$$

se réduit à

$$x > \frac{1}{a-1};$$

et, conséquemment,

A partir de $x = \frac{1}{a-1}$, *les fractions*

$$\frac{x}{a^x},\quad \frac{x+1}{a^{x+1}},\quad \frac{x+2}{a^{x+2}},\quad \ldots$$

forment une suite décroissante. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Propriétés des logarithmes.

89. Ces propriétés résultent, immédiatement, de la définition ci-dessus (**85**), jointe aux règles du calcul des exposants (*). En effet, soient x, x', x'', ... les logarithmes des nombres y, y', y'', ... dans le système dont la base est a, de sorte que

$$y = a^x,\quad y' = a^{x'},\quad y'' = a^{x''} .....$$

1° En multipliant membre à membre ces diverses égalités, nous aurons

$$yy'y'' ... = a^{x+x'+x''+\cdots},$$

ou

$$\log(yy'y'' ...) = x + x' + x'' + \cdots,$$

ou encore

$$\log(yy'y'' ...) = \log y + \log y' + \log y'' + \cdots$$

Ainsi, *le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.*

2° La division de y par y' donne

$$\frac{y}{y'} = a^{x-x'},$$

ou

$$\log\frac{y}{y'} = x - x' = \log y - \log y'.$$

Donc, *le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur* (**).

3° Élevons les deux membres de l'égalité $y = a^x$ à une

(*) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. I, p. 47.

(**) Cette propriété est comprise dans la première, attendu que *diviser par un nombre équivaut à multiplier par l'inverse de ce nombre.*

puissance quelconque n, entière ou fractionnaire; nous obtiendrons

$$y^n = a^{nx};$$

d'où

$$\log(y^n) = n \log(y).$$

Par conséquent : *le logarithme d'une puissance est égal au logarithme du nombre, multiplié par l'exposant de la puissance; le logarithme d'une racine est égal au logarithme du nombre, divisé par l'indice de la racine.*

Concordance des deux définitions.

90. Dans les éléments, on définit les logarithmes : *les termes d'une progression arithmétique commençant par zéro, correspondant aux termes d'une progression géométrique commençant par l'unité* (*B.*, *Alg.*, 176) (*). Cette définition *arithmétique* des logarithmes s'accorde avec la définition *algébrique* donnée ci-dessus.

Pour le faire voir, considérons d'abord l'équation exponentielle $y = a^x$, et donnons à x les valeurs

$$0,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta, \ldots,\ n\delta, \ldots;$$

nous aurons, comme valeurs correspondantes de y :

$$1,\ (a^\delta),\ (a^\delta)^2,\ (a^\delta)^3, \ldots,\ (a^\delta)^n \ldots,$$

ou

$$1,\ a^\delta,\ a^{2\delta},\ a^{3\delta}, \ldots,\ a^{n\delta}, \ldots.$$

Ainsi, *lorsque les logarithmes sont en progression par différence, les nombres correspondants sont en progression par quotient.*

(*) Ce renvoi signifie : *Manuel du Baccalauréat*, ALG., 176.

En second lieu, prenons les progressions

$$0,\quad \delta,\quad 2\delta,\quad 3\delta,\ \ldots,\quad n\delta,\ \ldots,$$
$$1,\quad q,\quad q^2,\quad q^3,\ \ldots,\quad q^n,\ \ldots,$$

et soit N un nombre donné, compris entre deux termes consécutifs de la seconde progression, ou égal à l'un d'eux (*).

Entre deux termes consécutifs de chacune des progressions, insérons m moyens, m étant très-grand; et soient

$$\delta' = \frac{\delta}{m+1}, \quad q' = \sqrt[m+1]{q} = q^{\frac{1}{m+1}}$$

les raisons des progressions

$$0,\quad \delta',\quad 2\delta',\quad 3\delta',\ \ldots,\quad n'\delta',\ \ldots,$$
$$1,\quad q',\quad q'^2,\quad q'^3,\ \ldots,\quad q'^n,\ \ldots,$$

qui remplacent les premières.

Nous pouvons toujours disposer du nombre entier m, de manière que l'unité soit un terme de la nouvelle progression par différence; car *l'équation*

$$i\frac{\delta}{m+1} = 1$$

admet une infinité de solutions entières (**).

(*) Le premier cas étant plus général que le second, nous négligerons celui-ci.

(**) Ceci suppose, bien entendu, que δ est commensurable. Soit alors $\frac{p}{q}$ la fraction irréductible équivalente à δ. De

$$\frac{i}{m+1} = \frac{1}{\delta} = \frac{q}{p},$$

on conclut (*B. Arith.*)

$$i = \lambda q, \quad m+1 = \lambda p,$$

λ étant un nombre entier quelconque.

Soit $q'^{i} = q^{\frac{1}{\delta'}} = a$ le terme de la progression par quotient qui correspond à $i\delta' = 1$: a est la *base* du système de logarithmes. Soient, en outre, q'^{l} et q'^{l+1} les deux puissances consécutives de q' comprenant entre elles le nombre donné N : leurs logarithmes sont $l\delta'$ et $(l+1)\delta'$; mais, à cause de $q' = a^{\frac{1}{i}} = a^{\delta'}$, on a

$$q'^{l} = a^{l\delta'}, \quad q'^{l+1} = a^{(l+1)\delta'}.$$

Ainsi, *les logarithmes des deux nombres entre lesquels est compris* N *sont les exposants des puissances auxquelles on devrait élever* a *pour reproduire ces nombres.* Et comme la différence entre q'^{l} et $q'^{(l+1)}$ peut être rendue aussi petite qu'on le veut, la propriété démontrée subsiste pour le nombre N, limite commune de q'^{l} et de $q'^{(l+1)}$ (*).

Logarithmes népériens.

91. En partant de la définition arithmétique, supposons $q = 1 + \delta$: c'est-à-dire, prenons les progressions

$$\begin{array}{llllll} 0, & \delta, & 2\delta, & 3\delta, & \ldots, & n\delta, \quad \ldots \\ 1, & 1+\delta, & (1+\delta)^2, & (1+\delta)^3, & \ldots, & (1+\delta)^n, \quad \ldots \end{array}$$

Si $n\delta = 1$, la *base* du système est (**86**)

$$a = (1+\delta)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pour que la progression arithmétique puisse être considérée comme renfermant *tous les nombres,* de 0 à 1, on doit supposer n infini. Mais alors

$$a = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(*) Plus exactement, cette propriété est la *définition* même de log N.

Ainsi, les plus simples notions de l'Arithmétique peuvent conduire au système de logarithmes dont la base est le nombre incommensurable e (*).

Comment on passe d'un système à un autre.

92. Soient x, x' les logarithmes d'un même nombre y, dans deux systèmes dont les bases sont a, b. Par définition,

$$y = a^x, \quad y = b^{x'}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres de la seconde égalité, dans le premier système; nous aurons

$$\log_a y = x' \log_a b,$$

ou

$$x = x' \log_a b,$$

ou encore

$$x' = x \frac{1}{\log_a b}.$$

Donc, *pour passer d'un système dont la base est* a, *à un autre système dont la base est* b, *on multiplie tous les logarithmes, calculés dans le premier système, par l'inverse du logarithme de la seconde base, ce logarithme étant pris dans le premier système.*

Définition du module.

93. Quand on passe du système *népérien*, c'est-à-dire du système dont la base est le nombre e, à un autre système ayant pour base b, le facteur constant $\frac{1}{\log_a b}$ devient $\frac{1}{\log_e b}$, ou,

(*) C'est, paraît-il, par des considérations de cette nature que Napier (ou Neper) est arrivé à l'invention des logarithmes *népériens*. Avant Lacroix, on les appelait logarithmes *naturels*, ou logarithmes *hyperboliques*.

plus simplement, $\frac{1}{lb}$. Ce facteur constant, égal à *l'inverse du logarithme népérien de la base* b, est le *module* du système dont la base est b.

94. *Remarque.* — Le module, égal à $\frac{1}{lb}$, est égal aussi à $\log_b e$. En effet, de même que $x' = x\,\frac{1}{\log_a b}$, on a

$$x = x'\,\frac{1}{\log_b a};$$

donc

$$\frac{1}{\log_a b} = \log_b a;$$

et, en particulier,

$$\frac{1}{lb} = \log_b e.$$

Exercices.

I. Discuter les fonctions

$$y = x^{\frac{1}{x}},\quad y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,\quad y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x,\quad y = x\,l\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ (*).$$

II. Discuter les fonctions

$$y = l\,.\cos x,\quad y = \cos(lx),\quad y = \frac{\cos(lx)}{x}.$$

III. La série

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n} + \cdots$$

est divergente (**).

(*) La discussion *complète* exige la théorie des dérivées.

(**) Elle l'est beaucoup moins que la série harmonique : *la somme des premiers termes, jusqu'au rang marqué par un nombre de trois cent deux chiffres, est inférieure à* 11. (*Mélanges mathématiques*, p. 167.)

IV. La série

$$\frac{\cos(l1)}{1} + \frac{\cos(l2)}{2} + \cdots + \frac{\cos(ln)}{n} + \cdots$$

est indéterminée.

V. Vers quelle limite tend le produit $nlnl\frac{l(n+1)}{ln}$, quand n augmente indéfiniment ?

Réponse : Vers 1.

VI. Prouver que la série

$$\left(\frac{l3}{l2} - 1\right) + \left(\frac{l4}{l3} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{l(n+2)}{l(n+1)} - 1\right) + \cdots$$

est divergente.

VII. Sommer

$$l.\text{séc}.x + l.\text{séc}.\left(\frac{x}{2}\right) + l.\text{séc}.\left(\frac{x}{4}\right) + l.\text{séc}.\left(\frac{x}{8}\right) + \cdots,$$

x étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

VIII. Théorème. — x étant une fraction proprement dite, les séries

$$\log(1 + x) + \log(1 + x^2) + \cdots + \log(1 + x)^n + \cdots,$$
$$\log(1 - x) + \log(1 - x^2) + \cdots + \log(1 - x^n) + \cdots$$

sont convergentes.

IX. Théorème. — x étant un nombre quelconque, la série qui a pour terme général

$$u_n = \left(x + n - \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x+n}\right) - 1,$$

est convergente.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS DES LOGARITHMES.

Des logarithmes vulgaires.

95. Les *logarithmes vulgaires*, ou *logarithmes de Briggs* (*), sont ceux que l'on trouve en partant des progressions

$$1,\ 10,\ 100,\ 1000, \ldots,$$
$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots :$$

la base du système est 10. Indépendamment des propriétés générales, ces logarithmes possèdent celles-ci, qu'il suffit d'énoncer :

1° *Le logarithme d'un nombre entier quelconque a pour partie entière* (**) *un nombre formé d'autant d'unités moins une qu'il y a de chiffres dans ce nombre entier;*

2° *Pour multiplier un nombre par* 10, 100, 1000,..., *il suffit d'ajouter* 1, 2, 3, ..., *unités à la caractéristique de son logarithme ;*

3° *Si deux nombres décimaux ne diffèrent que par le rang de la virgule, leurs logarithmes ne diffèrent que par la caractéristique.*

(*) Henri Briggs calcula les logarithmes des nombres compris entre 1 et 20 000, et les logarithmes des nombres compris entre 90 000 et 100 000. Son ouvrage, intitulé *Arithmetica logarithmica,* parut à Londres en 1624.

MM. *Namur* et *Mansion* viennent de publier des *tables* composées d'une vingtaine de pages, et qui, néanmoins, permettent d'écrire, avec *douze* décimales, les logarithmes des nombres entiers, de 1 à 434 *billions!*

(**) On sait que cette partie entière est appelée *caractéristique.*

96. *Logarithmes des fractions.* — L'identité

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1,$$

donne

$$\log\frac{a}{b}+\log\frac{b}{a}=0,$$

ou

$$\log\frac{a}{b}=-\log\frac{b}{a}.$$

Ainsi, *le logarithme d'une fraction proprement dite est égal au logarithme de la fraction renversée, pris en signe contraire* (**86**, 6°).

Il résulte de là que les fractions 0,1, 0,01, 0,001,..., ont pour logarithmes, respectivement, — 1, — 2, — 3, ... De même

$$\log\left(\frac{1}{N}\right)=-\log N.$$

Réciproquement, *le nombre correspondant à un logarithme négatif a la forme* $\frac{1}{N}$, *N étant le nombre correspondant au logarithme donné, pris positivement.*

97. *Logarithmes à caractéristique négative et à partie décimale positive.* — Les fractions de la forme $\frac{1}{N}$ étant peu commodes dans les calculs, surtout quand le dénominateur N est accompagné de décimales, on fait, sur les logarithmes *entièrement négatifs,* une transformation qui équivaut à la réduction de $\frac{1}{N}$ en décimales.

Soit, pour fixer les idées,

$$x=\frac{237}{87\,852}.$$

On trouve, dans la *Table de Callet* (*),

$$\begin{aligned}\log 237 &= 2{,}3747484\\ \log 87\,852 &= \underline{4{,}9437517}\end{aligned}$$

Par suite,

$$\log x = -2{,}5690033$$

(*) Pour la disposition des *Tables de Callet*, la *proportion logarithmique*, etc., voyez le *Manuel du Baccalauréat*, Alg., n° 20.

Ajoutons, à $\log x$, le nombre entier immédiatement supérieur à $-\log x$, puis retranchons-le; nous aurons

$$\log x = 3 - 2{,}5690033 - 3 = 0{,}4309967 - 3.$$

Pour abréger, apportons la partie négative -3 à la place de la caractéristique 0; et, pour éviter toute ambiguïté, plaçons le signe — au-dessus du chiffre 3 : il vient

$$\log x = \bar{3}{,}4309967.$$

La comparaison de ce nouveau logarithme avec celui qui est écrit plus haut, donne cette règle générale :

Pour transformer un logarithme, entièrement négatif, en un logarithme à caractéristique négative et à partie décimale positive, placez le signe — au-dessus de la caractéristique, après l'avoir augmentée d'une unité, et écrivez, à la suite de cette nouvelle caractéristique, le complément (*) *de la partie décimale du logarithme donné.*

98. Nous avons dit que cette transformation équivaut à une réduction de fraction ordinaire en fraction décimale. Pour le faire voir, reprenons la fraction $\frac{237}{87\,852}$. Si nous la multiplions par une puissance de 10 qui rende le produit plus grand que 1 et plus petit que 10, nous aurons, en divisant en même temps par cette puissance,

$$x = \frac{\dfrac{237\,000}{87\,852}}{10^3};$$

d'où

$$\log x = \log\frac{237\,000}{87\,852} - 3.$$

Mais,

$$\log\frac{237\,000}{87\,852} = \log 237 + 3 - \log 87\,852$$
$$= 3 - (\log 87\,852 - \log 237);$$

(*) Le *complément* d'une fraction décimale proprement dite est ce qu'il y faut ajouter pour obtenir l'unité.

donc

$$\log x = 3 - 2{,}5690033 - 3 = 0{,}4309967 - 3,$$

ou

$$\log x = \bar{3}{,}4309967,$$

comme ci-dessus.

99. *Remarque.* — Le logarithme $\bar{3}{,}4309967$ correspond à la *fraction décimale* $\dfrac{237\,000}{\frac{87\,852}{10^3}}$, laquelle, d'après ce qui précède, est comprise entre 0,001 et 0,01. Il résulte, de cette observation, que *le nombre correspondant à un logarithme dont la caractéristique seule est négative est une fraction décimale proprement dite, dans laquelle le premier chiffre significatif occupe, à partir de la virgule, un rang marqué par cette caractéristique.*

Usage des Tables de Callet.

100. Problème I. — *Trouver le logarithme d'un nombre donné.*

Premier cas. — *Le nombre est entier, et plus petit que* 108 000.

Le logarithme est inscrit dans la Table, sauf la caractéristique, qui est connue à l'avance (**95**, 1°).

Deuxième cas. — *Le nombre est entier, et plus grand que* 108 000.

Soit le nombre $x = 2\,647\,853$. Séparons assez de chiffres, sur la droite de ce nombre, pour que la partie restant à gauche soit comprise entre 10 000 et 108 000; nous aurons

$$\frac{x}{100} = 26\,487{,}53;$$

et la partie décimale du logarithme de ce dernier nombre égale celle du logarithme de x. On trouve, dans la Table,

$$\log 26\,478 = 4{,}4228852.$$

Il ne s'agit donc plus que de calculer la différence δ entre ce dernier logarithme et celui de 26 478,53. Pour cela, posons la proportion

$$\frac{26\,479 - 26\,478}{26\,478{,}53 - 26\,478} = \frac{\log 26\,479 - \log 26\,478}{\log 26\,478{,}53 - \log 26\,478},$$

ou

$$\frac{1}{0{,}53} = \frac{\text{diff. tab.}}{\delta}.$$

Elle donne

$$\delta = \text{diff. tab.} \times 0{,}53 = 164 \times 0{,}53.$$

Pour épargner au calculateur la peine d'effectuer la petite multiplication que nous rencontrons ici, on a inscrit, dans la Table, les produits de 164 par 0,1, 0,2, etc., ces *produits étant toujours exprimés en unités du septième ordre décimal.* D'après cela, nous aurons

$$\delta = 164 \times (0{,}5 + 0{,}03) = 164 \times 0{,}5 + \frac{164 \times 0{,}3}{10}$$
$$= 82 + \frac{49}{10} = 82 + 5 = 87.$$

Puis, en ajoutant cette différence au logarithme de 26 478 :

$$\log 26\,748{,}53 = 4{,}4228939,$$

et enfin

$$\log 2\,674\,853 = 6{,}4228939.$$

Voici la disposition du calcul :

log 26 478	= 6,4228852 (*)	
pour 0,5		82
pour 0,03		5
log 2 647 853	= 6,4228939	

(*) Il n'est pas nécessaire de modifier la caractéristique : on en écrit tout de suite la valeur définitive.

Troisième cas. — *Le nombre contient des décimales.*

On fait abstraction de la virgule, et l'on retombe sur les cas précédents.

Quatrième cas. — *Le nombre donné est une fraction.*

On a vu, ci-dessus, comment le logarithme d'une fraction se déduit des logarithmes des deux termes.

101. Problème II. — *Un logarithme étant donné, trouver le nombre correspondant.*

Premier cas. — *Le logarithme se trouve dans la Table.*

Nous supposons que le lecteur connaît la disposition des Tables : ce premier cas n'exige donc aucune explication.

Deuxième cas. — *Le logarithme donné tombe entre deux logarithmes consécutifs de la Table.*

Soit $\log x = 3{,}6774237$.

En cherchant dans la Table, on trouve que le logarithme qui approche le plus du $\log x$, *par défaut*, est 6 774 153 (*) ; le nombre correspondant à ce dernier logarithme est 47 579 ; donc

$$x = 47\,579 + \delta,$$

δ étant inférieur à l'unité.

Pour évaluer δ, on suppose encore les différences entre les nombres proportionnelles aux différences entre les logarithmes, c'est-à-dire que l'on écrit

$$\frac{\delta}{1} = \frac{6\,774\,237 - 6\,774\,153}{\text{diff. tab.}},$$

ou

$$\delta = \frac{84}{91}.$$

Si l'on réduisait cette fraction en décimales, on trouve-

(*) Dans la recherche du nombre correspondant à un logarithme donné, on ne fait attention à la caractéristique que pour déterminer, en dernier lieu, la place de la virgule.

rait $\delta = 0,92$; mais les *Tables de Callet* permettent encore d'éviter ce calcul. En effet, en parcourant la petite colonne des différences, on lit 9 en regard de 82 ; donc δ se compose d'abord de 0,9. Ensuite, si l'on place un zéro à la droite de $84 - 82 = 2$, on a 20 pour produit. Or, dans la même petite Table, 18 répond à 2 dixièmes ; donc 20 correspond, à fort peu près, à 2 centièmes. La seconde partie de δ est donc cette dernière fraction, en sorte que $\delta = 0,92$, comme ci-dessus.

En revenant à la recherche qui nous occupe, nous aurons $x = 47\,579,92$. Mais la caractéristique donnée était 3 ; donc enfin,

$$x = 4\,757,992,$$

à moins de 0,001.

Voici le type du calcul :

$$\begin{array}{rrrr} \log x = & 3,6774237 & & \\ \log 47\,579 = & ,6774153 & & \\ \hline & 84 & & \\ \textit{pour} & 82 & 9 & \\ \textit{pour} & 2 & & 2 \\ x = & 4\,757,992. & & \end{array}$$

Troisième cas. — *Le logarithme donné est entièrement négatif.*

Soit $\log x = -4,7248374$.

Posons $\log N = 4,7248374$; nous trouverons

$$N = 53\,068,57 ;$$

donc ([illegible])

$$x = \frac{1}{53\,068,57}.$$

Quatrième cas. — *La caractéristique seule est négative.*

On a vu, ci-dessus ([illegible]), ce qu'il faut faire pour trouver le nombre correspondant.

Calculs numériques.

102. PREMIER EXEMPLE :

$$x = \frac{\sqrt[3]{52\,678,47}}{\sqrt[4]{923\,744,18}}.$$

$$\log x = \frac{1}{3}\log 52\,678,47 - \frac{1}{4}\log 923\,744,18.$$

log 52 678		= 4,7216293
	0,4	33
	0,07	6
log 52 678,47		= 4,7216332
	$\frac{1}{3}$	= 1,5738777 +
log 923 740		= 5,9655497
	4....	19
	0,1	0
	0,18	0
log 923 744,18		= 5,9655516
	$\frac{1}{4}$	= 1,4913879 −
	log x	= 0,0824898
nombre corresp. 12 091		4622
	0,7 *pour*	276
		253
	0,06 *pour*	23

$x = 1,209176.$

103. DEUXIÈME EXEMPLE :

$$x = \frac{\sqrt[5]{0,000\,384\,74\sqrt[3]{\dfrac{89\,748}{124\,723}}}}{\sqrt[4]{724\,674\sqrt[3]{0,000\,674\,237\,5}}}.$$

$$\log x = \frac{1}{5}\left[\log 0{,}000\,584\,74 + \frac{1}{3}\log\frac{89\,748}{124\,725}\right]$$
$$-\frac{1}{4}\left[\log 724\,674 + \frac{1}{3}\log 0{,}000\,674\,237\,5\right].$$

$$\log\ 89\,748 = 4{,}9530248$$
$$\log 124\,725 = 5{,}0959466$$
$$\log\frac{89\,748}{124\,725} = \bar{1}{,}8570782$$
$$\frac{1}{3}(^*) = \bar{1}{,}9523594 +$$
$$\log 0{,}000\,584\,74 = \bar{4}{,}5851673 +$$
$$\bar{4}{,}5375267$$
$$\frac{1}{5} = \bar{1}{,}3075053 +$$
$$\log 0{,}000\,674\,237\,5 = \bar{4}{,}8288130$$
$$\frac{1}{3} = \bar{2}{,}9429377 +$$
$$\log 724\,674 = 5{,}8601427 +$$
$$4{,}8030804$$
$$\frac{1}{4} = 1{,}2007701 -$$
$$\log x = \bar{2}{,}1067352;$$
$$x = 0{,}012\,786\,0.$$

(*) Pour prendre le $\frac{1}{3}$ de $\bar{1}{,}8570782$, on observe que ce logarithme

$$= -1 + 0{,}8570782 = -3 + 2{,}8570782,$$

en rendant la caractéristique divisible par 3. Par suite

$$\tfrac{1}{3}\left(\bar{1}{,}8570782\right) = -1 + \tfrac{1}{3}\,2{,}8570782 = \bar{1}{,}9523594.$$

On opère de même dans tous les cas analogues à celui-là.

104. TROISIÈME EXEMPLE :

$$x = \sqrt[157]{\left(\frac{829}{828}\right)^{361}}.$$

$$\log x = \frac{361}{157} \log \frac{829}{828}.$$

$$\log 829 = 2,91855453$$
$$\log 828 = 2,91803034$$

$$\log \frac{829}{828} = 0,00052419$$

$$\log x = \frac{361}{157} \times 0,000\,524\,19.$$

Pour éviter la multiplication par $\frac{361}{157}$, prenons les logarithmes des deux membres; nous aurons

$$\log \log x = \log \frac{361}{157} + \log 0,000\,524\,19.$$

$$\log 361 = 2,5575072 +$$
$$\log 157 = 2,1958996 -$$
$$\log 0,000\,524\,19 = \bar{4},7194887 +$$

$$\log \log x = \bar{3},0810963$$
$$\log x = 0,0012053;$$
$$x = 1,002\,78.$$

105. QUATRIÈME EXEMPLE : *Quelle est la plus petite valeur entière de* n *satisfaisant à l'inégalité*

$$\left(\frac{100}{99}\right)^n > \frac{200\,000}{3}?$$

En prenant les logarithmes, puis les *logarithmes des logarithmes,* on a :

$$\log n > \log\log\frac{200\,000}{3} - \log\log\frac{100}{99}.$$

$$\log 200\,000 = 5,30103000$$

$$\log 3 = 0,47712125$$

$$\log\frac{200\,000}{3} = 4,82390875$$

$$\log\log\frac{200\,000}{3} = 0,6833991 \quad +$$

$$\log 100 = 2,$$

$$\log\ 99 = 1,99563519$$

$$\log\frac{100}{99} = 0,00436481$$

$$\log\log\frac{100}{99} = \bar{3},6399653 \quad -$$

$$\log n > 3,0434338;$$

$$n > 1105,1;$$

donc

$$n = 1106.$$

106. Cinquième exemple : *Résoudre l'inégalité*

$$\left(\frac{100}{99}\right)^n > \frac{2\,000}{3}\left[1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{150}\right].$$

Commençons par calculer, approximativement,

$$1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{150}.$$

$$\log\ 99 = \quad 1,99563519$$

$$150 \log\ 99 = 299,3452785 \quad +$$

$$150 \log 100 = 300 \quad -$$

$$\log\left(\frac{99}{100}\right)^{150} = \quad \bar{1},3452785.$$

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{150} > \quad 0{,}221\ 45.$$

$$1-\left(\frac{99}{100}\right)^{150} < \quad 0{,}778\ 55.$$

Ce dernier nombre étant un peu supérieur à $1-\left(\frac{99}{100}\right)^{150}$, il s'ensuit que l'on vérifiera l'inégalité proposée, si l'on satisfait à celle-ci :

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{n} > \frac{2\ 000}{3}\cdot 0{,}788\ 55.$$

On tire, de cette dernière,

$$n > \frac{\log 2\ 000 + \log 0{,}778\ 55 - \log 3}{\log 100 - \log 99}$$

$$\begin{aligned}
\log 2\ 000 &= 3{,}5010300 + \\
\log 0{,}778\ 55 &= \bar{1}{,}8912865 + \\
\log 3 &= 0{,}4771212 - \\
& 2{,}7151953 + \\
\log 100 &= 2 \\
\log\ 99 &= 1{,}9956352 \\
& 0{,}0043648 -
\end{aligned}$$

Donc

$$n > \frac{27\ 151\ 953}{43\ 468},$$

ou

$$n > 624{,}64.$$

107. Sixième exemple :

$$x = \frac{(1{,}1)^{50\ 001}}{50\ 001}.$$

$$\log x = 50\ 001 \log 1{,}1 - \log 50\ 001.$$

$$\log 1{,}1 = 0{,}041\ 392\ 69$$

$$\begin{array}{rl} 50\,001 \log 1{,}1 = & 2069{,}675\,892\,69 \\ \log 50\,001 = & 4{,}698\,978\,7 \; - \\ \hline & 2\,064{,}976\,914\,0. \end{array}$$

$x = 94\,822$ *suivi de deux mille soixante chiffres.*

108. Septième exemple : *Quelle est la plus petite valeur entière de* x *qui vérifie l'inégalité*

$$\frac{(1,1)^x}{x} > 250?$$

Si l'on essaie $x = 100$ et $x = 200$, on trouve, à cause de $\log 250 = 2{,}397\,9400$:

$$100 \log 1{,}1 - \log 100 = 4{,}139\,269 - 2 \qquad = 2{,}139\,269 < \log 250,$$
$$200 \log 1{,}1 - \log 200 = 8{,}278\,538 - 2{,}301\,030 = 5{,}977\,508 > \log 250.$$

De plus, on voit que le nombre cherché est beaucoup plus près de 100 que de 200. $x = 110$ donne

$$110 \log 1{,}1 - \log 110 = 4{,}553\,1959 - 2{,}041\,3927 = 2{,}511\,8033 > \log 250.$$

On trouve ensuite

$$\frac{(1,1)^{106}}{106} < 250, \quad \frac{(1,1)^{107}}{107} > 250;$$

donc la valeur demandée est 107. En effet,

$$\frac{(1,1)^{107}}{107} = 250{,}97 \text{ (*)}.$$

Résolution des équations exponentielles.

109. On appelle *équation exponentielle* celle qui a la forme

$$a^x = b,$$

(*) On peut comparer cette solution à celle que nous avons donnée ci-dessus (**91**).

x étant l'inconnue. Lorsque, comme on le suppose habituellement, a et b sont des quantités positives, cette équation admet toujours une solution réelle (82). Pour la déterminer, il suffit de prendre les logarithmes des deux membres, dans un système quelconque. En effet, on trouve ainsi

$$x \log a = \log b,$$

ou

$$x = \frac{\log b}{\log a} \ (*).$$

110. *Remarque.* — Quand les constantes a, b sont toutes deux plus grandes ou toutes deux plus petites que l'unité, la valeur de x est positive; elle est négative dans le cas contraire.

Des intérêts composés, et des annuités.

111. Une somme est placée à *intérêt composé* quand le prêteur, au lieu de recevoir, à la fin de chaque année, *l'intérêt simple* qui lui est dû, le laisse à la disposition de l'emprunteur, de manière à augmenter le capital.

L'intérêt composé, tel qu'il vient d'être défini, donne lieu aux problèmes suivants :

112. PROBLÈME I. — *Quelle est, au bout de* n *années, la valeur* A *d'un capital* a *placé à intérêt composé, le taux étant de* r *pour franc par an?*

r étant l'intérêt de 1 franc, ou, plus exactement, r étant le rapport entre cet intérêt et 1 franc, il s'ensuit que 1 franc vaut, à la fin de l'année, $1^f \times (1 + r)$. Par suite, un capital quelconque a vaut, au bout d'un an, $a(1 + r) = a'$.

Si, à la fin de l'année, l'emprunteur ne paie aucun inté-

(*) Les inégalités proposées dans les nos **105** et **106** ont été résolues par ce moyen.

rêt au prêteur, il jouit, pendant l'année suivante, de cet intérêt et du capital a : les choses se passent comme si, au lieu d'avoir reçu primitivement a, l'emprunteur avait reçu la somme a' au commencement de la deuxième année (*). Conséquemment, et d'après la formule précédente, le capital a vaut, après deux ans,

$$a'(1+r) = a(1+r)^2.$$

En répétant le même raisonnement, on trouve

$$A = a(1+r)^n. \qquad (1)$$

113. PROBLÈME II. — *Après combien d'années un capital* a, *placé à intérêt composé, acquiert-il la valeur* A?

Il est clair qu'il s'agit de résoudre l'équation (1), par rapport à n. Cette résolution se fait commodément au moyen des logarithmes; elle donne (**109**)

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}.$$

114. PROBLÈME III. — *Quelle valeur produira-t-on au bout de* n *années, si l'on place, au commencement de chacune, un même capital* a, *et qu'on accumule, avec toutes ces sommes, leurs intérêts composés?*

D'après la formule (1), cette valeur est la somme s des termes de la progression par quotient :

$$a(1+r)^n,\quad a(1+r)^{n-1},\ \ldots,\ a(1+r);$$

donc

$$s = a(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

115. PROBLÈME IV. — *Quelle somme* b *doit-on payer*

(*) On peut encore supposer que l'emprunteur rende, au prêteur, le capital a', et qu'il le reprenne aussitôt.

annuellement, pour amortir, au bout de n *années, un capital* a *et ses intérêts composés?*

Cette somme b est ce qu'on appelle une *annuité*. Pour la déterminer, il suffit d'exprimer que la valeur du capital a, à la fin de la $n^{ième}$ année, est égale à la somme des valeurs des n annuités, au bout de ce même temps. On trouve ainsi, en appelant r l'intérêt de 1 franc,

$$a(1+r)^n = b(1+r)^{n-1} + b(1+r)^{n-2} + \cdots + b(1+r) + b,$$

ou

$$a(1+r)^n = b\frac{(1+r)^n - 1}{r}. \qquad (2)$$

Cette formule générale donne la solution de diverses questions relatives aux annuités.

Si, par exemple, on veut *trouver combien il faut d'années pour amortir un capital* a, *au moyen d'annuités égales à* b, on devra résoudre l'équation (2) par rapport à n. Or, en faisant passer $(1 + r)^n$ dans le premier membre, on obtient d'abord

$$(1+r)^n(b - ar) = b;$$

puis, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$n = \frac{\log b - \log(b - ar)}{\log(1+r)}. \qquad (3)$$

116. *Discussion.* — 1° Si l'on suppose $b > ar$, c'est-à-dire *si l'annuité surpasse l'intérêt simple du capital,* la formule (3) donne, pour n, une *valeur finie et positive*. Cette valeur est d'autant plus grande, que l'excès de b sur ar est petit.

2° Si $b = ar$,

$$n = \frac{\log b - \log 0}{\log(1+r)}.$$

Or, $\log 0 = -\infty$; donc $n = +\infty$. Il est facile d'interpréter

ce résultat : quand l'emprunteur ne paie, à la fin de chaque année, que l'intérêt simple du capital, il doit toujours le capital ; on ne peut donc demander à quelle époque la dette sera éteinte.

Ce cas est celui des *rentes perpétuelles*.

3° Enfin, si l'on suppose $b < ar$, c'est-à-dire *si l'annuité est moindre que l'intérêt simple du capital*, le second membre de la formule contient le *logarithme d'une quantité négative ;* cette formule ne donne donc aucune valeur réelle pour n (**86**, 7°). C'est ce qu'il est encore facile d'expliquer.

En effet, on vient de voir que la *dette est constante* si l'annuité est égale à l'intérêt simple ; donc, quand elle est inférieure à celui-ci, *la dette, au lieu de diminuer, augmente sans cesse*. Ce résultat, qui peut paraître étrange, est une conséquence naturelle du principe de l'*intérêt proportionnel au temps*.

Exercices.

I. Pendant combien d'années doit-on laisser un capital, placé à $4\frac{1}{2}$ pour 100, pour que la valeur en soit décuplée?

Réponse : Pendant un peu plus de 52 ans.

II. *Thomas Parr* vécut 152 ans (*). Si, à partir de sa vingt-cinquième année, il avait placé tous les ans, au taux de 6 pour 100, une somme de 10 livres sterling, combien ses héritiers auraient-ils dû recevoir à sa mort?

Réponse : 28 900 livres.

III. Après combien d'années aura-t-on amorti un capital de 100 francs, emprunté à 5 pour cent, si l'on paie, annuellement, 5f,10?

Réponse : Au bout d'environ 80 ans.

(*) Il mourut en 1634.

IV. Combien vaudra, à la fin de 1899, une somme de 1 franc, placée, à 5 pour 100, au commencement de l'an 800?

Réponse : 203 300 000 000 000 000 000 000 francs.

V. Discuter la formule

$$y = p\left[e - \left(1 + \frac{n}{100}\right)^{\frac{100}{n}}\right] (*).$$

VI. Quelle est la plus petite valeur entière de x satisfaisant à l'inégalité

$$(1{,}01)^x > 10x?$$

Réponse : $x = 917$.

VII. Une personne emprunte pour un an, *à intérêt composé*, un *capital* a. Elle convient de se libérer au moyen de n paiements égaux, effectués à des intervalles de temps égaux entre eux : le premier paiement sera fait $\frac{1}{n}$ d'année après le moment de l'emprunt. Le taux de l'intérêt est de $\frac{r}{n}$ *pour franc, pour* $\frac{1}{n}$ *d'année*. On demande :

1° La valeur b de chacun des paiements ;

2° Vers quelle limite tend le rapport $\frac{nb}{a}$, lorsque n augmente indéfiniment?

3° Comment varie cette limite lorsque r diminue?

4° Quelle est la valeur de cette limite pour $r = 0$?

VIII. On veut *amortir*, en n années, un capital a et ses intérêts composés, au moyen d'annuités décroissant comme les nombres $n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$. Le taux de l'in-

(*) Dans cette *nouvelle formule d'intérêt composé*, y est *l'intérêt de* 1^f, *pour* n *années*; p représente le quotient entier du *taux* (intérêt de 1^f, pour un an), par

$$e - \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 0{,}013\,468\ldots$$

Quand n *augmente indéfiniment*, *l'intérêt* y *tend vers* p $(e-1)$.

térêt est r pour franc. Quelle est la valeur du premier paiement?

Réponse :

$$\frac{nr^2(1+r)^2}{(nr-1)(1+r)^n+1}a.$$

IX. Un nombre entier, *inconnu*, est représenté par n chiffres dans le système de numération dont la base est b; combien faut-il de chiffres pour l'écrire dans le système dont la base est b'?

Réponse : x étant le nombre de chiffres cherché, on a

$$(n-1)\frac{\log.b}{\log.b'} < x < 1 + n\frac{\log.b}{\log.b'}.$$

X. Les nombres a, b étant commensurables, dans quel cas la valeur de x, donnée par l'équation $a^x = b$, est-elle commensurable?

XI. Résoudre l'équation

$$a^{x^2+px+q} = b.$$

Les nombres a, b, p, q étant entiers, dans quel cas les valeurs de x sont-elles commensurables?

II.

DÉRIVÉES.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES DÉRIVÉES.

Préliminaires.

117. Si, dans l'équation à deux variables

$$y = f(x), \qquad (1)$$

on attribue à x un accroissement h (*), y prend un accroissement correspondant k, déterminé par la relation

$$y + k = f(x + h).$$

La valeur de cet accroissement est donc

$$k = f(x + h) - f(x).$$

Par suite, *le rapport entre l'accroissement de la fonction et l'accroissement de la variable* a pour expression

$$\frac{k}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \qquad (2)$$

Cela posé, si h diminue indéfiniment, il en est de même

(*) L'accroissement h peut être positif ou négatif : ordinairement, on le suppose positif.

pour k. Mais comme, à chaque instant, le rapport $\frac{k}{h}$ a une valeur déterminée, on conçoit que cette valeur tend vers une certaine limite, qu'elle atteint seulement lorsque h, et par suite k, sont devenus égaux à zéro. Cette limite, qui dépend de la nature de la fonction $f(x)$, est dite la *dérivée* de $f(x)$. Par conséquent,

On appelle dérivée d'une fonction la limite vers laquelle tend le rapport entre l'accroissement de cette fonction et l'accroissement de la variable, lorsque celui-ci tend vers zéro.

118. *Remarque.* — Si, dans l'équation (2), on suppose $h=0$, le second membre devient $\frac{0}{0}$. Par suite, pour trouver directement la dérivée d'une fonction, on devra, dans la plupart des cas, mettre le rapport $\frac{k}{h}$ sous une forme telle, que la limite de ce rapport, c'est-à-dire la dérivée, ne semble plus indéterminée.

119. Soit, par exemple,

$$y=f(x)=x^3-2x+7;$$

alors

$$y+k=(x+h)^3-2(x+h)+7,$$

puis

$$\frac{k}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-2h}{h}.$$

Si l'on faisait tout de suite $h=0$, le numérateur s'annulerait en même temps que le dénominateur; mais, h étant facteur commun aux deux termes, on a

$$\frac{k}{h}=3x^2+3xh+h^2-2.$$

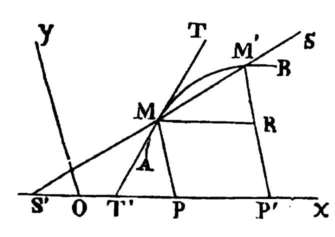
Actuellement, si h tend vers zéro, les termes $3xh$ et h^2 diminuent indéfiniment, tandis que les autres sont *constants*. Donc

$$\lim\frac{k}{h}=f'(x)=3x^2-2.$$

Nous venons de vérifier, dans un cas très-simple, l'*exis-*

tence de la dérivée; cette vérification a été faite sur toutes les fonctions que considère l'Analyse. On peut d'ailleurs, de la manière suivante, rattacher la *théorie des dérivées* à la *théorie des tangentes.*

120. THÉORÈME. — *Le coefficient angulaire de la tangente à une courbe est égal à la dérivée de l'ordonnée par rapport à l'abscisse.*



On sait que *la tangente* MT *à une courbe* AB, *en un point* M, *est la limite des positions d'une sécante* MM'S *qui tourne autour du point* M, *supposé fixe, jusqu'à ce que le second point* M' *d'intersection vienne se confondre avec le premier.*

Cela posé, et $y=f(x)$ étant l'équation de AB, menons MR parallèle à Ox. Soient alors x, y les coordonnées du point M, et $x+h$, $y+k$ les coordonnées du point M'; de sorte que h représente l'accroissement PP' de l'abscisse OP, et k l'accroissement M'R de l'ordonnée PM. Lorsque le point M' parcourt l'arc BM, en se rapprochant de M, le coefficient angulaire de la sécante MM' est, à chaque instant, égal à $\frac{M'R}{MR}$, c'est-à-dire égal à $\frac{k}{h}$. Si donc a est le coefficient angulaire de la tangente MT, on a simultanément, à cause des triangles semblables MM'R, S'MP :

$$a=\frac{MP}{T'P}=\frac{MP}{\lim . S'P}=\lim\frac{MP}{S'P},$$

$$\frac{k}{h}=\frac{MP}{S'P},\quad \lim\frac{k}{h}=\lim\frac{MP}{S'P};$$

puis, par la définition de la dérivée (**117**),

$$f'(x)=a. \tag{3}$$

121. *Remarque.* — Cette équation fondamentale est en

défaut dans un seul cas : celui où la tangente MT n'existerait pas (*). En le laissant de côté, on conclut, du théorème précédent, que *toute fonction continue a une dérivée.*

122. *Expressions du rapport* $\frac{k}{h}$. — I. Ce rapport ayant pour limite $f'(x)$, on peut le représenter par $f(x) + \varepsilon$, ε *étant une quantité qui s'annule avec* h. Ainsi,

$$\frac{k}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

ou

$$k = h\left[f'(x) + \varepsilon\right].$$

II. Si, comme le suppose la figure, les fonctions $f(x)$, $f'(x)$ restent continues depuis le point M, dont l'abscisse est x, jusqu'au point M', dont l'abscisse est $x+h$, *l'arc convexe* MEM' *admet au moins une tangente* CD *parallèle à* MM'. Soit α l'abscisse du point de contact E. D'après l'équation (3),

$$\frac{k}{h} = f'(\alpha).$$

La quantité α, intermédiaire entre x et $x + h$, peut être représentée par $x + \theta h$, θ *étant une fraction proprement dite.* Donc

$$\frac{k}{h} = f'(x + \theta h).$$

123. *Dérivée de la variable indépendante.* — Si l'équation (1) se réduit à $y = x$, l'accroissement k devient égal

(*) Les courbes représentées par

$$y = x \sin\frac{1}{x}, \quad y = x \sin(1x), \text{ etc.}$$

n'ont *pas de tangente à l'origine.*

à l'accroissement h. Donc $\frac{k}{h}=1$, $\lim\frac{k}{h}=y'=1$: *la dérivée de la variable indépendante est égale à l'unité* (*).

124. *Dérivée d'une constante.* — Elle est évidemment *zéro* (**).

Dérivée d'une somme, d'un produit, etc.

125. *Dérivée d'une somme.* — Soient u, v, w, ... des fonctions de x, dont les dérivées u', v', w', ... sont supposées connues, et soit y la fonction formée avec les premières, par voie d'addition ou de soustraction, de sorte que

$$y = u + v - w + \cdots$$

Donnons à x un accroissement quelconque Δx (***) : u, v, w, ..., y prendront les accroissements correspondants Δu, Δv, Δw, ..., Δy; et nous aurons

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w + \cdots;$$

puis, en retranchant membre à membre,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w + \cdots \text{ (****)}.$$

Divisant tous les termes par Δx, et *passant à la limite*, nous trouvons

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim\frac{\Delta w}{\Delta x} + \cdots;$$

ou enfin, en désignant par y' la dérivée de y,

$$y' = u' + v' - w' + \cdots \qquad (4)$$

(*) Ceci revient à dire que *la bissectrice de l'angle formé par les parties positives des axes a, pour coefficient angulaire, l'unité.*

(**) En effet, toute parallèle à l'axe des abscisses est représentée par $y=b$.

(***) La *caractéristique* Δ indique la *différence* qui existe entre deux valeurs d'une variable, ou l'*accroissement* qu'elle subit en passant de la première valeur à la seconde.

(****) Cette relation exprime que l'*accroissement d'une somme est égal à la somme des accroissements des parties*, ce qui est assez évident.

Ainsi, *la dérivée d'une somme ou d'une différence de fonctions est égale à la somme ou à la différence des dérivées de ces fonctions.*

126. *Dérivée d'un produit de deux facteurs.* — Soit

$$y = uv, \tag{5}$$

u et v étant des fonctions d'une variable indépendante x. En opérant comme dans le numéro précédent, on a, successivement,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v,$$
$$y' = uv' + vu' + \lim\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right).$$

Le facteur $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tend vers la quantité finie u', tandis que le facteur Δv a pour limite zéro; donc

$$\lim\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) = 0,$$

et

$$y' = uv' + vu'. \tag{6}$$

Ce résultat s'énonce ainsi : *La dérivée d'un produit de deux facteurs est égale au premier facteur multiplié par la dérivée du second, plus au second facteur multiplié par la dérivée du premier.*

127. *Remarques.* — I. Si l'un des deux facteurs est constant, c'est-à-dire si le produit a la forme $y = av$, on a simplement

$$y' = av'.$$

II. En divisant membre à membre les égalités (6) et (5), on obtient

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Par conséquent, *le rapport entre la dérivée d'un produit et ce produit, est égal à la somme des résultats que l'on obtient en divisant la dérivée de chaque facteur par ce facteur.*

128. *Dérivée d'un produit de plusieurs facteurs.* — Nous commencerons par faire voir que si la dernière proposition est vraie dans le cas de $n-1$ facteurs, elle subsiste pour n facteurs : ce lemme étant démontré, la proposition sera générale, puisqu'elle a lieu dans le cas de deux facteurs.

Soit
$$y = u_1 . u_2 . u_3 \ldots u_{n-1} . u_n,$$
ou
$$y = \mathrm{P}u_n,$$
en posant
$$\mathrm{P} = u_1 . u_2 . u_3 \ldots u_{n-1}.$$
Par hypothèse,
$$\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \cdots + \frac{u'_{n-1}}{u_{n-1}}.$$
D'ailleurs
$$\frac{y'}{y} = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} + \frac{u'_n}{u_n};$$
donc
$$\frac{y'}{y} = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \cdots + \frac{u_{n-1}}{u_{n-1}} + \frac{u'_n}{u_n};$$
ce qu'il fallait démontrer.

Actuellement, multiplions par $y = u_1u_2 \ldots\ldots u_n$ les deux membres de la dernière égalité ; nous aurons
$$y' = u_2u_3 \ldots u_nu'_1 + u_1u_3 \ldots u_nu'_2 + \cdots + u_1u_2 \ldots u_{n-1}u'_n. \quad (7)$$
Ainsi, *la dérivée d'un produit est égale à la somme des résultats que l'on obtient en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit des autres facteurs.*

129. *Dérivée d'un quotient.* — De
$$y = \frac{u}{v},$$
on conclut
$$vy = u;$$

puis, en appliquant la remarque ci-dessus,

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v},$$

et enfin

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Donc, *la dérivée d'une fraction est égale au dénominateur multiplié par la dérivée du numérateur, moins le numérateur multiplié par la dérivée du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur* (*).

130. *Remarque.* — Si la fraction a la forme $y = \frac{a}{v}$, a étant une constante, $a' = 0$ (**127**), et

$$y' = -\frac{av'}{v^2}.$$

131. *Dérivée d'une puissance.* — Soit $y = u^n$, l'exposant étant d'abord supposé entier positif. Cette fonction est le produit de n facteurs égaux à u; donc, par la formule (7),

$$y' = nu^{n-1}u'.$$

Ainsi, *pour trouver la dérivée d'une puissance de fonction, on multiplie la puissance par son exposant, on diminue d'une unité cet exposant, et l'on multiplie le résultat par la dérivée de la fonction.*

Cette règle subsiste, quelle que soit la forme de l'exposant n.

1° Si $n = \frac{p}{q}$, p et q étant entiers positifs,

$$y^q = u^p,$$

puis

$$qy^{q-1}y' = pu^{p-1}u' \text{ (**)};$$

(*) La notation algébrique est, on le voit, plus commode que le langage ordinaire.

(**) En effet, si, dans $y^q = u^p$, on remplaçait y et u par leurs valeurs, on obtiendrait *deux fonctions identiques*, dont les dérivées seraient identiques.

mais
$$y^{q-1} = \frac{y^q}{y} = u^{p-\frac{p}{q}};$$
donc
$$y' = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} u'.$$

2° Soit $n = -p$, p étant entier ou fractionnaire, mais positif. Alors $y = \frac{1}{u^p}$; puis (120)
$$y' = -\frac{pu^{p-1}u'}{u^{2p}} = -pu^{-p-1}u';$$
ou
$$y' = nu^{n-1}u'.$$

122. *Dérivée d'une racine carrée.* — Dans le cas particulier de $y = u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u}$, on a
$$y' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Donc, *la dérivée d'une racine carrée est égale à la dérivée de la fonction placée sous le radical, divisée par le double du radical.*

Dérivées des fonctions algébriques.

123. Au moyen des règles précédentes, on trouve aisément la dérivée d'une fonction *algébrique et explicite* quelconque. Voici quelques exemples simples :

I. Soit
$$y = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m$$
un polynôme entier par rapport à x. On a, par l'application des règles (4), (6), etc.,
$$y' = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \cdots + A_{m-1}.$$

II. Plus généralement, soit

$$y = Ax^m + Bx^n + Cx^p + Dx^q + \cdots,$$

les exposants étant quelconques : la dérivée est

$$y' = mAx^{m-1} + nBx^{n-1} + pCx^{p-1} + qDx^{q-1} + \cdots$$

Ainsi, *la dérivée d'un polynôme, fonction d'une lettre* x, *est égale à la somme des résultats que l'on obtient en multipliant chaque terme par l'exposant de* x, *et en diminuant d'une unité cet exposant.*

III. $$y = (x^3 - 3x - 5)^2 (x^2 + 2x - 1)^3.$$

La fonction y est le produit de deux facteurs, lesquels sont des puissances de polynômes. Donc (**126**)

$$\begin{aligned} y' &= (x^3 - 3x - 5)^2\, 3\,(x^2 + 2x - 1)^2 (2x + 2) \\ &\quad + (x^2 + 2x - 1)^3\, 2\,(x^3 - 3x - 5)(3x^2 - 3) \\ &= 6\,(x^3 - 3x - 5)\,(x^2 + 2x - 1)^2 (x + 1) \\ &\quad \times \left[x^3 - 3x - 5 + (x^2 + 2x - 1)\,(x - 1)\right], \end{aligned}$$

ou

$$y' = 6(x^3 - 3x - 5)(x^2 + 2x - 1)^2 (x + 1)(2x^3 + x^2 - 6x - 4).$$

IV. $$y = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x} + \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}.$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right) - \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2} \\ &\quad + \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) - \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2} - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^2}; \end{aligned}$$

ou, après quelques réductions,

$$y' = 8x \text{ (*)}.$$

V.
$$y = \frac{1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{q-1}}.$$

Si l'on multiplie par $1 - x$ les deux termes,

$$y = \frac{1 - x^p}{1 - x^q}.$$

Donc

$$y' = \frac{qx^{q-1}(1 - x^p) - px^{p-1}(1 - x^q)}{(1 - x^q)^2},$$

ou

$$y' = \frac{qx^{q-1}(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}) - px^{p-1}(1+x+x^2+\cdots+x^{q-1})}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{q-1})^2}.$$

On a, identiquement :

$$1+x+x^2+\cdots+x^{p-1} = (1-x)(1+2x+3x^2+\cdots+px^{p-1})+px^p,$$
$$1+x+x^2+\cdots+x^{q-1} = (1-x)(1+2x+3x^2+\cdots+qx^{q-1})+qx^q.$$

Par conséquent, l'expression précédente se réduit à

$$y' = \frac{qx^{q-1}(1+2x+3x^2+\cdots+px^{p-1}) - px^{p-1}(1+2x+3x^2+\cdots+qx^{q-1})}{(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1})^2}.$$

Cette valeur est plus simple que celle que l'on aurait trouvée en prenant, immédiatement, la dérivée de y (**).

(*) On arrive plus rapidement à ce résultat, si l'on commence par mettre la fonction y sous la forme

$$y = 2(2x^2 + 1).$$

(**) La comparaison des deux résultats donne cette *identité* :

$$qx^{q-1}(1+2x+3x^2+\cdots+px^{p-1}) - px^{p-1}(1+2x+3x^2+\cdots+qx^{q-1})$$
$$= (1+x+x^2+\cdots+x^{q-1})[1+2x+3x^2+\cdots+(p-1)x^{p-2}]$$
$$-(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1})[1+2x+3x^2+\cdots+(q-1)x^{q-2}].$$

Dérivées des fonctions de fonctions.

134. Soient $y=f(u)$, $u=F(x)$: y est *fonction d'une fonction* de la variable indépendante x; et il s'agit d'exprimer la dérivée de y, relative à cette variable, au moyen des dérivées $f'(u)$ et $F'(x)$, et sans remplacer u par sa valeur dans $f(u)$.

Donnons à x l'accroissement Δx : y et u prendront des accroissements correspondants, Δy, Δu; et nous aurons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\ (^*);$$

d'où, en passant à la limite, et en désignant par y' la dérivée de y par rapport à x,

$$y'=f'(u)\,.\,F'(x),$$

ou encore

$$y'=f'(u)\,.\,u'.$$

135. Si l'on avait

$$y=f(u),\quad u=F(v),\quad v=\varphi(x),$$

on trouverait, avec la même facilité,

$$y'=f'(u)\,.\,F'(v)\,.\,\varphi'(x);$$

et ainsi de suite. Donc, en général :

La dérivée d'une fonction de fonctions est égale au produit des dérivées des fonctions qui la composent, chacune de ces dérivées étant prise par rapport à la variable dont la fonction dépend immédiatement.

(*) En général, A, B, C *étant trois grandeurs de même espèce, le rapport de la première grandeur à la deuxième, multiplié par le rapport de la deuxième à la troisième, donne le rapport de la première à la troisième.* (*B.*, *Arith.*, 208.)

136. *Remarque.* — La règle qui nous a donné la dérivée de u^n (**131**) peut être regardée comme une application de ce théorème.

Dérivées des fonctions logarithmiques ou exponentielles.

137. *Dérivée de* $\log x$. — La base du système de logarithmes étant quelconque, on a, successivement,

$$y = \log x, \quad y + k = \log(x + h),$$

$$\frac{k}{h} = \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Si l'on supposait $h = 0$, le second membre prendrait la forme $\frac{0}{0}$, ainsi qu'on pouvait s'y attendre (**118**). Pour faire cesser l'indétermination apparente, on remplace $\frac{h}{x}$ par $\frac{1}{n}$, n étant un nombre que l'on fera croître indéfiniment; et l'on a, par les propriétés des logarithmes,

$$\frac{k}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \frac{1}{x}\log\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Lorsque n croît, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tend vers le nombre e (**65**). En faisant attention que

$$\lim \log\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = \log\left[\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] \text{(*)},$$

(*) Généralement, si une variable x tend vers une limite a, et que f désigne une fonction continue,

$$\lim f(x) = f(a),$$

ou

$$\lim f(x) = f(\lim x).$$

Il suffit, pour démontrer cette proposition, de considérer la courbe représentée par $y = f(x)$.

on a donc

$$\lim \frac{k}{h} = y' = \frac{1}{x} \log e;$$

ou, en désignant par M le module, égal à log e (**94**),

$$y' = \frac{M}{x}.$$

S'il s'agit des logarithmes népériens, $M = 1$; donc la dérivée de

$$y = \mathrm{l}x,$$

est

$$y' = \frac{1}{x}.$$

138. *Remarque.* — D'après le théorème ci-dessus (**134**), la *fonction de fonction*, $y = \mathrm{l}u$, a pour dérivée

$$y' = \frac{u'}{u}.$$

139. *Dérivée de* a^x. — Soit $y = a^x$, ou

$$x = \log_a y.$$

Prenant les dérivées des deux membres, et appliquant le même théorème, nous avons

$$1 = \frac{M}{y} y'.$$

Par suite,

$$y' = \frac{y}{M} = \frac{a^x}{M}.$$

D'ailleurs, le module M est égal à $\frac{1}{\mathrm{l}a}$ (**93**); donc enfin

$$y' = a^x \mathrm{l}a :$$

la dérivée de l'exponentielle a^x *est le produit de cette exponentielle par le logarithme népérien de* a.

140. Si $y=e^x$,

$$y'=e^x=y:$$

la dérivée de la fonction e^x *est égale à cette fonction.*

141. *Remarque.* — Le théorème relatif aux fonctions de fonctions (**134**), donne encore, pour la dérivée de $y=e^u$,

$$y'=e^u u'.$$

Dérivées des fonctions circulaires.

142. *Dérivée de* sin x. — De $y=\sin x$ on déduit, en suivant la marche ordinaire,

$$\frac{k}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h};$$

ou (*)

$$\frac{k}{h}=\frac{2\sin\frac{1}{2}h\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)}{h}=\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right).$$

Le rapport $\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$ a pour limite l'unité (**); donc

$$\lim\frac{k}{h}=y'=\cos x.$$

Ainsi, *la dérivée du sinus est égale au cosinus.*

143. *Dérivée de* cos x. — Pour former la dérivée de $y=\cos x$, remplaçons cette fonction par $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; nous

(*) (*B.*, *Trig.*, 24).
(**) (*B.*, *Trig.*, 30).

aurons, d'après le théorème relatif aux fonctions de fonctions, et en observant que $\frac{\pi}{2} - x$ a pour dérivée (-1),

$$y' = -\sin x :$$

la dérivée du cosinus est égale à moins le sinus.

144. *Dérivée de* tang x. — De

$$y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

on conclut (**129**)

$$y' = \frac{\cos x \,.\, \cos x + \sin x \,.\, \sin x}{\cos^2 x},$$

ou

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dérivées des fonctions circulaires inverses.

145. *Dérivée de* arc sin x. — Si la valeur de x, tirée d'une équation $y = f(x)$, est $x = \mathrm{F}(y)$, les fonctions f, F sont dites *inverses* l'une de l'autre. Par exemple, la fonction inverse de $x = \sin y$ est $y = \operatorname{arc} \sin x$ (*).

Cela posé, pour trouver la dérivée de cette dernière fonction, servons-nous de l'équation

$$x = \sin y.$$

En prenant les dérivées de deux membres, par rapport à x, nous avons

$$1 = \cos y \,.\, y'.$$

Mais

$$\cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y} = +\sqrt{1 - x^2} \text{ (**)};$$

(*) Cette notation signifie que y *est l'arc dont le sinus est* x. Autrefois, on écrivait $y = \operatorname{arc} (\sin = x)$.

(**) On suppose l'arc y compris dans le premier quadrans.

donc
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

146. *Dérivée de* arc cos x. — Un calcul semblable au précédent donne, pour la dérivée de $y =$ arc cos x,
$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

147. *Remarque.* — Lorsqu'un arc α, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, va en croissant, son sinus β augmente, et son cosinus γ diminue. Par conséquent, le rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta}$ est *positif*, et le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta\gamma}$ est *négatif*. La limite du premier rapport, ou la dérivée de *arc sin* β, est donc *positive*; tandis que la dérivée de *arc cos* γ est *négative*. On arriverait à des résultats différents si l'on faisait d'autres hypothèses sur l'arc α. En général, *la dérivée de* y = arc sin x *a le signe de* cos y; et *la dérivée de* y = arc cos x *a le signe contraire à celui de* sin y.

148. *Dérivée de* arc tang x. — De $y =$ arc tang x, on déduit
$$x = \text{tang}\, y;$$
puis, en prenant les dérivées,
$$1 = \frac{y'}{\cos^2 y} = y'(1 + x^2),$$
ou
$$y' = \frac{1}{1 + x^2} \text{ (*)}.$$

149. *Remarque.* — Les dérivées des fonctions *transcendantes* arc sin x, arc cos x, arc tang x sont *algébriques*; la troisième dérivée est même *rationnelle*.

(*) Nous engageons le lecteur à chercher, *directement*, les dérivées des fonctions a^x, cos x, tang x, arc sin x, arc cos x, arc tang x.

Dérivées des fonctions composées.

150. Soit $y = F(u, v)$, u et v étant des fonctions de la variable indépendante x : il s'agit, comme dans le cas d'une fonction de fonctions (**134**), d'obtenir la dérivée de y, relative à x, sans remplacer u et v par leurs valeurs $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

Donnons à x un accroissement Δx; mais, afin de mieux apercevoir la partie de la variation de y qui dépend de u et celle qui dépend de v, supposons, pour un instant, que u soit une constante, v étant variable : y deviendra $F(u, v + \Delta v)$; et son accroissement *partiel* sera

$$F(u, v + \Delta v) - F(u, v).$$

En second lieu, dans $F(u, v + \Delta v)$, regardons $v + \Delta v$ comme une constante, et faisons varier u; nous aurons, pour la valeur *finale* de y,

$$F(u + \Delta u, v + \Delta v) \text{ (*)},$$

et, pour le second accroissement partiel,

$$F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v + \Delta v).$$

Du reste, la somme de ces deux accroissements partiels ou *virtuels* est égale à l'accroissement total ou réel Δy; car

$$\left.\begin{aligned} \Delta y &= F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v) \\ &= \left[F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v + \Delta v)\right] \\ &+ \left[F(u, v + \Delta v) - F(u, v)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(*) Il est assez visible qu'au lieu de substituer $x + \Delta x$ dans u et dans v en même temps, on peut faire cette substitution *en deux fois*. Par exemple, si $y = u + v$, on obtiendra d'abord, en supposant u *constante*,

$$u + v + \Delta v;$$

puis, en faisant varier u dans ce premier résultat,

$$u + \Delta u + v + \Delta v.$$

Actuellement, d'après la formule

$$k = h\left[f'(x) + \varepsilon\right],$$

démontrée précédemment (**122**), on a

$$F(u, v + \Delta v) - F(u, v) = \left[F'_v(u, v) + \beta\right] \Delta v,$$
$$F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v + \Delta v) = \left[F'_u(u, v + \Delta v) + \alpha\right] \Delta u.$$

En outre,

$$F'_u(u, v + \Delta v) = F'_u(u, v) + \gamma :$$

β, α, γ sont des quantités qui s'annulent avec Δv, Δu, Δv; l'*indice* désigne la quantité par rapport à laquelle on prend la dérivée.

Si l'on substitue dans (1), on a

$$\Delta y = \left[F'_u(u, v) + \gamma + \alpha\right] \Delta u + \left[F'_v(u, v) + \beta\right] \Delta v,$$

puis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[F'_u(u, v) + \gamma + \alpha\right] \frac{\Delta u}{\Delta x} + \left[F'_v(u, v) + \beta\right] \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

et, en passant à la limite,

$$y' = F'_u(u, v) \,.\, u' + F'_v(u, v) \,.\, v'. \qquad (2)$$

Or, $F'_u(u, v) \,.\, u'$ est la valeur qu'on trouverait pour y' si, supposant v constante, on appliquait la règle relative aux fonctions de fonctions (**124**) : c'est la *dérivée partielle* de y considérée comme une fonction de la fonction u. De même $F'_v(u, v) \,.\, v'$ est la seconde dérivée partielle de y. La formule (2) exprime donc que : *la dérivée complète d'une fonction composée est égale à la somme de ses dérivées partielles, obtenues en appliquant le principe des fonctions de fonctions.*

151. *Remarque.* — Les règles relatives à la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, etc., sont, comme on devait s'y attendre, des conséquences de ce théorème.

152. *Applications.* — I. $y = u^v$. Si l'on suppose v constante, y est une *puissance*, dont la dérivée a pour valeur (**131**) $vu^{v-1}u'$. De même, u étant constante, la dérivée de l'*exponentielle* u^v serait (**129**) $u^v v' \mathrm{l} u$. La somme de ces deux dérivées partielles est

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \mathrm{l} u. \tag{3}$$

II. $y = x^x$. La formule (3) devient, si l'on y fait $u = v = x$,

$$y' = x^x (1 + \mathrm{l} x).$$

III.
$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

La même formule donne, en supposant

$$u = 1 + \frac{1}{x}, \quad v = x:$$

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-1} \left[-\frac{1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{l} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] (*).$$

IV.
$$y = (1 + x^2)^{e^{\operatorname{arc\,tang} x}}.$$

En posant $u = 1 + x^2, \quad v = e^{\operatorname{arc\,tang} x}$,

(*) On arrive plus simplement à ces derniers résultats, en cherchant la dérivée de $\mathrm{l}y$. Par exemple, de

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

on conclut

$$\mathrm{l}y = x \mathrm{l} \left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

puis

$$\frac{y'}{y} = \frac{-\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} + \mathrm{l} \left(1 + \frac{1}{x}\right);$$

etc.

on obtient, encore par la formule (3),

$$y' = e^{\text{arc tang } x}(1 + x^2)^{e^{\text{arc tang } x}} \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$+ (1 + x^2)^{e^{\text{arc tang } x}} e^{\text{arc tang } x} \frac{l(1 + x^2)}{1 + x^2};$$

ou

$$y' = \frac{2x + l(1 + x^2)}{1 + x^2} e^{\text{arc tang } x} (1 + x^2)^{e^{\text{arc tang } x}}.$$

Dérivées des fonctions implicites.

153. Les règles précédentes donnent le moyen de former la dérivée d'une fonction *explicite* quelconque, algébrique ou transcendante, quelle qu'en soit la complication. Avant de passer au cas des fonctions *implicites,* supposons que l'on donne

$$z = \mathrm{F}(x, y), \quad y = \varphi(x),$$

et que l'on demande la dérivée de z par rapport à la variable indépendante x. On aura, en regardant z comme une *fonction composée* (**150**), et en écrivant F'_x, F'_y au lieu de $\mathrm{F}'_x(x, y)$, $\mathrm{F}'_y(x, y)$:

$$z' = \mathrm{F}'_x + y'\mathrm{F}'_y \text{ (*)}.$$

154. Soit actuellement

$$\mathrm{F}(x, y) = 0$$

une équation donnée, non résoluble par rapport à y. En représentant par z le premier membre, nous aurons

$$z' = \mathrm{F}'_x + y'\mathrm{F}'_y.$$

(*) On voit qu'une même fonction z peut avoir deux dérivées relatives à une même variable indépendante x; savoir : une *dérivée partielle* F'_x, et la *dérivée totale* z'. Pour éviter toute ambiguïté, on désigne quelquefois la première sous le nom de *dérivée par rapport à la lettre* x. Du reste, un peu d'habitude rend inutile cette dénomination.

Mais, dans le cas actuel, la valeur de $y = \varphi(x)$ est de telle nature, que z est constamment zéro. Donc $z' = 0$, et

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Ainsi, *la dérivée de la fonction implicite* y, *déterminée par l'équation* F $(x, y) = 0$, *s'obtient en divisant la dérivée du premier membre, relative à la lettre* x, *par la dérivée relative à la lettre* y, *et en changeant le signe du quotient.*

155. *Application.* — De l'équation

$$x^y + y^x - 1 = 0,$$

qui n'est résoluble ni par rapport à y, ni par rapport à x, on conclut

$$y' = -\frac{yx^{y-1} + y^x \mathrm{l}y}{xy^{x-1} + x^y \mathrm{l}x}.$$

Dérivées successives.

156. La dérivée y' d'une fonction y, étant elle-même une fonction de la variable indépendante x, a aussi une dérivée, que l'on obtiendra, comme y', par l'application des règles précédentes. Cette *dérivée de la dérivée* est dite la *dérivée deuxième* de y : on la représente par y''. De même, la dérivée de y'', ou la *dérivée troisième* de y, est désignée par y'''. Et ainsi de suite.

157. *Dérivées successives d'un polynôme entier.* — Soit

$$y = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m.$$

On a, successivement :

$$y' = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \cdots + A_{m-1},$$
$$y'' = m(m-1)A_0x^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} + \cdots + 1.2A_{m-2},$$
. . . .
$$y^{(m)} = m(m-1)\ldots 3.2.1A_0,$$
$$y^{(m+1)} = 0.$$

Ainsi, *les* m — 1 *premières dérivées d'un polynôme entier, de degré* m, *sont des polynômes entiers, dont les degrés sont* (m — 1), (m — 2),..., 1 ; *la dérivée* m[ième] *est une constante; et les dérivées suivantes sont nulles.*

158. *Dérivées successives de* lx, e^x, $\sin x$, $\cos x$. — Si l'on prend

$$y = lx, \qquad y = e^x, \quad y = \sin x, \qquad y = \cos x,$$

on trouve :

$$y' = x^{-1}, \qquad y' = e^x, \quad y' = \cos x, \qquad y' = -\sin x,$$
$$y'' = -1.x^{-2}, \qquad y'' = e^x, \quad y'' = -\sin x, \quad y'' = -\cos x,$$
$$y''' = 1.2x^{-3}, \qquad y''' = e^x, \quad y''' = -\cos x, \quad y''' = \sin x,$$
$$y^{\text{iv}} = -1.2.3^{-4}, \quad y^{\text{iv}} = e^x, \quad y^{\text{iv}} = \sin x, \qquad y^{\text{iv}} = \cos x,$$

. . . .

Théorème de Taylor.

159. On donne ce nom à la formule suivante, qui permet de développer une fonction quelconque de $x + h$, suivant les puissances entières et positives de l'accroissement h :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \cdots \quad (1)$$

Dans le cas d'une fonction entière, le seul dont nous ayons à nous occuper ici, le second membre se termine par

$$\frac{h^m}{1.2.3\ldots m} f^m(x),$$

m étant le degré de $f(x)$: en effet, $f^m(x)$ est une constante (**157**).

Pour démontrer cette formule, remarquons d'abord que,

si $f(x)$ se réduit à $A_0 x^m$, elle devient, après la suppression du facteur commun A_0,

$$(x+h)^m = x^m + \frac{h}{1} m x^{m-1} + \frac{h^2}{1.2} m(m-1) x^{m-2} + \cdots$$
$$+ \frac{h^m}{1.2.3\ldots m} \cdot m(m-1)\ldots 3.2.1;$$

c'est-à-dire qu'elle ne diffère pas de la formule du binôme (**47**).

En second lieu, il est facile de voir que si le théorème de Taylor est vrai dans le cas de deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, il subsiste pour la fonction $F(x)$ formée par la somme de ces fonctions. Soient, en effet,

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x) + \cdots, \quad (2)$$

$$\psi(x+h) = \psi(x) + \frac{h}{1}\psi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\psi''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x) + \cdots, \quad (3)$$

$$F(x) = \varphi(x) + \psi(x). \quad (4)$$

Ajoutant membre à membre les égalités (2), (3), et ayant égard au théorème sur la dérivée d'une somme (**125**), on trouve, à cause de l'équation (4),

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} F'''(x) + \cdots.$$

Cela posé, la formule (1) étant démontrée dans le cas où $f(x)$ se réduit à $A_0 x^m$ ou à $A_1 x^{m-1}$, subsiste donc si

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1}.$$

De même, étant démontrée pour ce deuxième cas et pour celui de

$$f(x) = A_2 x^{m-2},$$

elle l'est pour

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2}.$$

Et ainsi de suite.

En résumé, si

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m,$$

le développement de $f(x+h)$ est

$$f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots + A_0 h^m.$$

160. *Remarques.* — I. Si le polynôme $f(x)$ a ses coefficients entiers, les fonctions

$$\frac{f'(x)}{1}, \quad \frac{f''(x)}{1.2}, \quad \frac{f'''(x)}{1.2.3}, \ \ldots$$

sont aussi des polynômes à coefficients entiers. En effet, ces fonctions sont les coefficients des puissances de h, dans $f(x+h)$.

II. $\frac{f''(x)}{1.2}$ est la moitié de la dérivées de $\frac{f'(x)}{1}$. De même

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3} = \frac{1}{3}\left(\frac{f''(x)}{1.2}\right)';$$

etc.

161. *Application.* — Soit

$$f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 7x + 1.$$

On a

$$\frac{f'(x)}{1} = 20x^3 + 6x^2 - 7, \quad \frac{f''(x)}{1.2} = 30x^2 + 6x,$$

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3} = 20x + 2, \quad \frac{f^{\text{IV}}(x)}{1.2.3.4} = 5;$$

puis

$$f(x+h) = 5x^4 + 2x^3 - 7x + 1 + (20x^3 + 6x^2 - 7)h + (30x^2 + 6x)h^2 + (20x + 2)h^3 + 5h^4.$$

Exercices (*).

I. Former les dérivées des fonctions

$$y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}},\quad y=\mathrm{l}(x+\sqrt{1+x^2}),$$
$$y=x\sqrt{1+x^2}+\mathrm{l}(x+\sqrt{1+x^2}),\quad y=\mathrm{ll}x,$$
$$y=\mathrm{lll}x,\quad y=\mathrm{l}^n x\ (^{**}),\quad y=\text{arc tang}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3.$$

Résultats :

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}},\quad y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad y'=2\sqrt{1+x^2},$$
$$y'=\frac{1}{x\mathrm{l}x},\quad y'=\frac{1}{x\mathrm{l}x\mathrm{ll}x},\quad y'=\frac{1}{x\mathrm{l}x\mathrm{l}^2x\ldots\mathrm{l}^{n-1}x},$$
$$y'=6\,\frac{(x^2-1)^2}{(x-1)^6+(x+1)^6}.$$

II. Même recherche pour les fonctions

$$y=\mathrm{l}\frac{1-\cos mx}{1+\cos mx},\quad y=\cos(\sin x),\quad y=\text{arc sin}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$y=\text{arc cos}\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x},\qquad y=\text{arc tang}\,(\sqrt{1+x^2}-x),$$
$$y=\text{arc sin}\,\frac{\sqrt{1-e^2}\sin x}{1-e\cos x},\quad y=\mathrm{l}(x+\sqrt{x^2-a^2})+\text{arc cos}\frac{a}{x},$$
$$y=\mathrm{l}\frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2}+\text{arc sin}\,\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2},\quad y=\text{arc tg}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

(*) Quelques-uns sont tirés d'un intéressant Recueil publié par M. *Léonce Clarke.*

(**) Cette expression, qui ne représente pas une puissance, est définie par les deux équations

$$z=\mathrm{l}^{n-1}x,\quad y=\mathrm{l}z.$$

Résultats :

$$y'=\frac{2m}{\sin mx},\qquad y'=-\cos x\sin(\sin x),\qquad y'=\frac{1}{1+x^2},$$

$$y'=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x},\qquad y'=-\frac{1}{2(1+x^2)},\qquad y'=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos x},$$

$$y'=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}},\qquad y'=2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4},\qquad y'=\frac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}.$$

III. Appliquer, aux équations suivantes, le théorème sur les dérivées des fonctions implicites :

$$\sin y=y\sin x,\quad \operatorname{tang} y=1+x\sin y,\quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}y=\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x,\quad x\sqrt{1+y}=y\sqrt{1+x},$$

$$\arcsin x+\arcsin y=c.$$

Résultats :

$$y'=\frac{y\cos x}{\cos y-\sin x},\qquad y'=\frac{\sin y\cos^2 y}{1-x\cos^3 y},\qquad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'=\frac{\sqrt{1-m^2}}{1+m\cos x},\qquad y'=\frac{y^2(2+x)}{x^2(2+y)},\qquad y'=-\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}.$$

IV. Trouver les dérivées des fonctions

$$y=\arccos(1-x)-\sqrt{2x-x^2},$$

$$y=\frac{3}{2}\arccos(1-x)-\left(\frac{3}{2}+\frac{x}{2}\right)\sqrt{2x-x^2},$$

$$y=\frac{5.3}{3.2}\arccos(1-x)-\left(\frac{5.3}{3.2}+\frac{5x}{3.2}+\frac{x^2}{3}\right)\sqrt{2x-x^2},$$

$$y=\frac{7.5.3}{4.3.2}\arccos(1-x)-\left(\frac{7.5.3}{4.3.2}+\frac{7.5x}{4.3.2}+\frac{7x^2}{4.3}+\frac{x^3}{4}\right)\sqrt{2x-x^2},$$

. . . .

Résultats :

$$y' = \frac{x}{\sqrt{2x - x^2}},\quad y' = \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}},\quad y' = \frac{x^3}{\sqrt{2x - x^2}},\ \ldots$$

V. D'après la question précédente, former une fonction $f(x)$ qui s'annule avec x, et dont la dérivée soit $\frac{x^m}{\sqrt{2x-x^2}}$. ($m$ est entier positif.)

VI. Trouver les $n^{\text{ièmes}}$ dérivées des fonctions

$$y = e^{x \cos a} \cos(x \sin a),$$
$$y = e^x \cos x,$$
$$y = \text{arc tang}\, x,$$
$$y = uv.$$

Résultats :

$$y^n\ (^*) = e^{x \cos a} \cos(x \sin a + na),$$

$$y^n = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n}{4}\pi\right),$$

$$y^n = 1.2.3\ldots(n-1) \cos^n y \cos\left(ny + \frac{n-1}{2}\pi\right),$$

$$y^n = uv^n + \frac{n}{1}u'v^{n-1} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}u''v^{n-2} + \cdots + \frac{n}{1}u^{n-1}v' + u^n v\ (^{**}).$$

VII. Théorème. — *La dérivée* n^{ième} *de* $(1 - x^2)^{n+\frac{1}{2}}$ *est*

$$(-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{n+1} \sin(n+1)(\text{arc} \cos x).$$

(Olinde Rodrigues.)

VIII. Théorème. — *Si l'on fait* $x = \cot\theta$, *la dérivée* n^{ième} *de* $y = \frac{x}{1+x^2}$ *est*

$$y^{(n)} = (-1)^n 1.2.3\ldots n \cos(n+1)\theta \sin^{n+1}\theta.$$

(*) y^n représente la dérivée $n^{\text{ième}}$ de y.

(**) Dans cette formule, qui est due à Leibniz, v^n, u^n, v^{n-1}, ..., représentent également des dérivées.

CHAPITRE VIII.

APPLICATION DES DÉRIVÉES A LA DISCUSSION DES FONCTIONS.

162. THÉORÈME. — *Une fonction est croissante ou décroissante, suivant que sa dérivée est positive ou négative.*

Soit $y = f(x)$ une fonction continue. Cette fonction est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que l'accroissement de y, correspondant à un accroissement *positif* de x, *suffisamment petit*, est *positif* ou *négatif*. En d'autres termes, si, pour toutes les valeurs de l'accroissement h, inférieures à une limite donnée l, on a

$$f(a+h) - f(a) > 0,$$

la fonction proposée est croissante depuis $x = a$ jusqu'à $x = a + l$: elle serait décroissante si l'on avait constamment

$$f(a+h) - f(a) < 0.$$

Cela posé, le théorème résulte immédiatement de la relation

$$k = h\left[f'(x) + \varepsilon\right]$$

trouvée au n° **122**. En effet, si on l'écrit ainsi :

$$f(a+h) - f(a) = h\left[f'(a) + \varepsilon\right],$$

et si l'on se rappelle que ε s'annule avec h, on voit que, *pour des valeurs suffisamment petites de* h, *le premier membre a le signe de* f′ (a). Autrement dit, *la fonction* f (x) *est croissante ou décroissante pour* x = a, *selon que* f′ (a) *est positive ou négative.*

163. *Remarque.* — Si $f'(a) = 0$, $f(a+h) - f(a)$ est de même signe que ε. On va voir que ce cas particulier est fort important.

164. *Maximums et minimums.* — Lorsqu'une fonction continue cesse de croître avec la variable pour décroître ensuite, on dit qu'elle atteint un *maximum;* de même, elle atteint un *minimum* quand elle cesse de décroître pour croître ensuite. Ainsi, $f(a)$ est un maximum ou un minimum de $f(x)$, suivant que l'on a, pour des valeurs positives de h, suffisamment petites,

$$f(a) > f(a \pm h),$$

ou

$$f(a) < f(a \pm h).$$

Ordinairement, les valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum, annulent $f'(x)$; et, en outre, $f(a)$ est *maximum* ou *minimum*, suivant que $f''(a)$ et *négative* ou *positive* (*).

165. Le théorème qui précède facilite beaucoup la discussion des fonctions; c'est ce dont on pourra juger par les exemples suivants :

I. *Discuter* $y = x^{\frac{1}{x}}$, *la variable* x *étant positive.*

1° Quand x est très-petit et de la forme $\frac{1}{n}$,

on a

$$y = \frac{1}{n^n}; \quad \lim y = 0.$$

Ainsi, pour

$$x = 0, \quad y = 0.$$

2° La valeur de la dérivée est $y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - lx)$ (**152**). Cette dérivée reste positive tant que l'on a $lx < 1$, ou $x < e$; donc la fonction y *est croissante* depuis $x = 0$ jusqu'à

(*) Ces propositions seront démontrées dans le *Calcul différentiel.*

$x=e$. Pour cette dernière valeur de x, y atteint un maximum que l'on calcule aisément par la formule

$$\log y = \frac{\log e}{e} = \frac{\mathrm{M}}{e}.$$

3° A partir de $x=e$, la dérivée y' reste négative; donc la fonction y est *décroissante* depuis $x=e$ jusqu'à $x=+\infty$. D'ailleurs, à cause de $\mathrm{l}y=\frac{\mathrm{l}x}{x}$, $\lim \mathrm{l}y=0$ (**88**); d'où $\lim y=1$. Ainsi, pour

$$x=+\infty, \quad y=1\ (*).$$

II. *Discuter* $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x$, *la variable* x *étant positive.*

1° On voit d'abord, en remplaçant x par $\frac{1}{n}$, que pour

$$x=0, \quad y=1.$$

2° $$y'=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}+\mathrm{l}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right].$$

Pour $x=0$, $y'=+\infty$; donc la fonction y est d'abord *croissante.*

3° Afin de reconnaître plus aisément si la dérivée y' reste positive quel que soit x, posons

$$z=\frac{x^2-1}{x^2+1}+\mathrm{l}\left(x+\frac{1}{x}\right);$$

d'où

$$z'=\frac{x^4+4x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

La dérivée z', négative pour $x=0$, s'annule pour

$$x=\sqrt{-2+\sqrt{5}}.$$

(*) Si l'on se borne aux valeurs entières de x, on a

$$1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}, \quad \text{puis} \quad \sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}>\cdots$$

Par conséquent, le maximum de $\sqrt[n]{n}$ est $\sqrt[3]{3}$.

Cette valeur donne, après quelques réductions,

$$z = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{5} + \mathrm{l}(2\sqrt{5} + 2)\right].$$

Ce résultat est positif; donc la dérivée y' ne change pas de signe, et la fonction y croît indéfiniment avec x.

III. *Discuter* $y = x\,\mathrm{l}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, *la variable* x *étant positive.*

1° $$y' = \mathrm{l}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x - 1}, \quad y'' = -\frac{1}{x(x + 1)^2}.$$

La seconde dérivée étant toujours négative, y' est une fonction constamment *décroissante*. Cette fonction, infinie pour $x = 0$, s'annule pour $x = +\infty$. Par suite, la fonction proposée est *croissante* depuis $x = 0$ jusqu'à $x = +\infty$.

2° Si l'on fait $x = 0$, on trouve $y = 0 \times \infty$, *forme indéterminée*. Mais, en écrivant ainsi la valeur générale de y :

$$\frac{\mathrm{l}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}},$$

et en se rappelant (**88**) que

$$\lim \frac{\log n}{n} = 0,$$

on obtient $y = 0$.

3° La même indétermination apparente se reproduit quand on suppose x infini. Mais

$$y = \mathrm{l}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x;$$

donc (**137**)

$$\lim y = \mathrm{l} \lim \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{l}e = 1.$$

Exercices.

I. Discuter les fonctions

$$y=\frac{l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{l\left(1+\frac{2}{x}\right)},\quad y=\frac{lx}{l\sin x},\quad y=\frac{l(1+x)}{x};$$

la variable x étant supposée positive.

II. Discuter

$$y=e^x+e^{-x},\quad y=\frac{e^x-e^{-x}}{2x},\quad y=e^{\frac{1}{x}},\quad y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

III. La fonction $x-\frac{2}{3}\sin x-\frac{1}{3}\operatorname{tg} x$ est-elle croissante ou décroissante pour $x=0$?

IV. Discuter

$$y=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^p}{1+x+x^2+\cdots+x^q},$$

en supposant $p<q$.

V. Discuter

$$y=\frac{(1+x+x^2+\cdots+x^n)^2}{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}}\ (*).$$

VI. Discuter les fonctions

$$y=(1-x)\,l(1+x)+(1+x)\,l(1-x),$$
$$y=6\cos x+3\cos 2x-4\cos 3x.$$

VII. Trouver le maximum et le minimum de chacune des fonctions

$$\frac{x}{x^2+x+1},\quad \frac{x-1}{x^2+3x+2},\quad \frac{x-a}{x^2+px+q},\quad \frac{(a+x)^2}{a-x}-\frac{(b+x)^2}{b-x}.$$

(*) Voyez p. 77, exercice XIV.

VIII. Trouver, dans une ellipse donnée, la normale la plus éloignée du centre.

IX. On joint l'une des extrémités B du petit axe d'une ellipse, à un point quelconque M de la courbe, par le rayon vecteur BM. Dans quel cas ce rayon vecteur est-il maximum ou minimum?

X. A une sphère donnée, inscrire un cône droit dont la surface totale soit un maximum.

XI. A une sphère donnée, circonscrire un cône droit dont la surface totale soit un minimum.

XII. On donne les bases et la hauteur d'un trapèze. Entre quelles limites peut varier la différence des côtés *latéraux* (*)?

CHAPITRE IX.

DES FONCTIONS PRIMITIVES.

Préliminaires.

166. Étant donnée une fonction $f(x)$, on peut se proposer de *trouver une fonction* $\varphi(x)$ *dont* $f(x)$ *soit la dérivée*, ou qui soit telle que l'on ait

$$\varphi'(x) = f(x).$$

Cette fonction inconnue, $\varphi(x)$, est dite la *fonction primitive* de $f(x)$; en sorte que le problème dont il s'agit peut encore

(*) Relativement à cette locution, voir l'opuscule intitulé : *Réhabilitation d'un pléonasme.*

s'énoncer ainsi : *remonter de la dérivée à la fonction primitive* (*).

167. Théorème. — *Deux fonctions qui ont des dérivées égales ne peuvent différer que par une constante.*

Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions ayant même dérivée : la différence $\varphi(x) - \psi(x)$ a une dérivée nulle. Par conséquent, pour démontrer le théorème, il suffit de faire voir que *toute fonction dont la dérivée est nulle se réduit à une constante.*

Soit $f(x)$ cette fonction inconnue. Si elle ne se réduit pas à une constante, elle sera croissante ou décroissante dans un certain intervalle. Admettons, pour fixer les idées, qu'elle soit croissante depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

Si, de $f(x)$, nous retranchons la quantité

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

qui devient $f(a)$ pour $x = a$, et $f(b)$ pour $x = b$ (**), nous formons une fonction

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

dont la dérivée, à cause de $f'(x) = 0$, se réduit à la quantité négative

$$-\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$F(x)$ serait donc *décroissante*, au moins depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. Or cette conclusion est inadmissible, car

(*) Dans le *Calcul intégral*, on verra que ce problème, *quand il est possible*, est presque toujours très-difficile à résoudre.

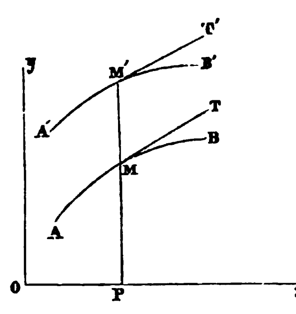
(**) Pour former cette fonction, il suffit de prendre un binôme $mx + n$ dont les coefficients satisfassent aux conditions

$$ma + n = f(a), \quad mb + n = f(b).$$

$F(a) = F(b) = 0$; ainsi, contrairement à l'hypothèse, la fonction $f(x)$ n'est pas croissante. On verrait, de la même manière, qu'elle ne saurait être décroissante. Donc $f(x)$ se réduit à une constante.

168. *Remarques.* — I. Le lemme que nous venons de démontrer peut être présenté sous cette forme géométrique : *si le coefficient angulaire de la tangente à une ligne est constamment nul, cette ligne est une parallèle à l'axe des abscisses.*

II. Semblablement, le théorème exprime que : *si les tangentes* MT, M'T', *aux points correspondants* M, M', *sont constamment parallèles, la différence* MM' *des ordonnées* MP, M'P *est une constante* C; *et les courbes* AB, A'B' *sont égales :* on obtient la seconde en faisant mouvoir la première parallèlement à l'axe des ordonnées.



169. Il résulte, du théorème précédent, que si l'on a trouvé, *par un procédé quelconque,* une fonction $\varphi(x)$ dont la dérivée soit $f(x)$, toutes les fonctions jouissant de la même propriété sont données par la formule

$$F(x) = \varphi(x) + C,$$

C étant une *constante arbitraire.*

La Géométrie conduit à la même conclusion : si $y = \varphi(x)$ est l'équation de AB, toutes les courbes, telles que A'B', *parallèles à* AB (*), sont représentées par $Y = \varphi(x) + C$.

(*) Ordinairement, cette dénomination a un sens différent de celui que nous lui attribuons ici.

Recherche des fonctions primitives.

170. En renversant les règles de la *dérivation*, on peut, dans quelques cas très-simples, remonter d'une dérivée à la fonction primitive. Par exemple, comme les dérivées de

$$x^m, \quad lx, \quad e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \text{arc}\sin x, \quad \text{arc}\,\text{tang}\, x,$$

sont, respectivement :

$$mx^{m-1}, \quad \frac{1}{x}, \quad e^x, \quad \cos x, \quad -\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{1}{1+x^2},$$

il s'ensuit que si l'on donne

$$y' = x^m, \quad y' = \frac{1}{x}, \quad y' = e^x, \quad y' = \cos x,$$
$$y' = \sin x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

on aura, pour les fonctions primitives les plus générales :

$$y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c, \qquad y = lx + c, \quad y = e^x + c,$$
$$y = \sin x + c, \qquad y = -\cos x + c,$$
$$y = \text{arc}\sin x + c, \quad y = \text{arc}\,\text{tang}\, x + c.$$

171. *Remarques.* — I. La première formule est en défaut dans le cas de $m = -1$, c'est-à-dire, lorsque $y' = \frac{1}{x}$. C'est ce qui devait arriver; car cette fraction est la dérivée de lx.

II. *Le logarithme d'une constante est une constante.* — On peut donc, au lieu de la deuxième formule, prendre

$$y = lx + lc,$$

ou encore

$$y = l\,(cx).$$

172. D'après la règle relative à la dérivée d'une somme, la fonction primitive de

$$y' = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m$$

est

$$y = \frac{A_0}{m+1} x^{m+1} + \frac{A_1}{m} x^m + \cdots + A_m x + c.$$

173. Les formules précédentes sont immédiatement déduites des règles du calcul des dérivées. En voici quelques autres, souvent employées, et dont la vérification est facile :

si

$$y' = \frac{1}{x+a}, \quad y' = \frac{x}{x^2+a^2}, \quad y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

$$y' = \frac{1}{(x+a)^2+b^2}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{a+bx-x^2}},$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{a+bx+x^2}};$$

on aura

$$y = \mathrm{l}\left(\frac{x+a}{c}\right), \quad y = \mathrm{l}\,\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{c}, \quad y = \sqrt{x^2+a^2}+c,$$

$$y = \frac{1}{b}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+a}{b}+c, \quad y = \mathrm{arc\,sin}\,\frac{x-\frac{1}{2}b}{\sqrt{a+\frac{1}{4}b^2}}+c,$$

$$y = \mathrm{l}\left(x+\frac{1}{2}b+\sqrt{a+bx+x^2}\right)+c\ (^*).$$

(*) Ces notions seront complétées dans le *Calcul intégral*.

CHAPITRE X.

SÉRIES LOGARITHMIQUES OU CIRCULAIRES.

Développement de $l(1+x)$.

174. La fonction $l(1+x)$ a pour dérivée $\frac{1}{1+x}$. Effectuant la division, on trouve

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^n}{1+x}.$$

Donc, en remontant des dérivées aux fonctions primitives,

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^n}{n} \mp \varphi(x). \quad (1)$$

Dans cette égalité, $\varphi(x)$ *est une fonction inconnue, qui s'annule avec* x, *et qui a pour dérivée* $\frac{x^n}{1+x}$ (*).

Il est aisé de voir que, si la variable x est comprise entre 0 et $+1$, *inclusivement*, la valeur de $\varphi(x)$ converge vers zéro quand n augmente. En effet, pour toutes les valeurs positives de x, on a

$$\frac{x^n}{1+x} > 0, \quad \frac{x^n}{1+x} < x^n;$$

(*) La fonction $\varphi(x)$ est la différence entre $l(1+x)$ et le polynôme

$$x - \frac{x^2}{2} + \cdots \pm \frac{x^n}{n};$$

donc *elle existe*. En second lieu, $\varphi(0) = l(1) = 0$. Enfin,

$$\mp \varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - \cdots \pm x^{n-1}) = \mp \frac{x^n}{1+x};$$

donc *la fonction* $\varphi(x)$ *a pour dérivée* $\frac{x^n}{1+x}$.

c'est-à-dire

$$\varphi'(x) > 0, \qquad (2)$$

$$\varphi'(x) - x^n < 0. \qquad (3)$$

D'après l'inégalité (2), la fonction $\varphi(x)$ est *croissante* (**162**); et, comme elle s'annule avec x, on a

$$\varphi(x) > 0. \qquad (4)$$

D'un autre côté, le premier membre de l'inégalité (3) est la dérivée de

$$\varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1};$$

donc cette dernière fonction est *décroissante*. De plus, elle s'annule avec x; conséquemment, pour toutes les valeurs positives de x,

$$\varphi(x) < \frac{x^{n+1}}{n+1}. \qquad (5)$$

La fraction $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ croîtrait indéfiniment avec n, si x surpassait l'unité (**81**); mais si, comme nous l'avons supposé, x est compris entre 0 et $+1$, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ a pour limite zéro. A cause des inégalités (4), (5), la fonction $\varphi(x)$ tend aussi vers zéro. Par suite, le développement de $\mathrm{l}(1+x)$, en série convergente, est

$$\mathrm{l}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \pm \frac{x^n}{n} \mp \cdots \qquad (6)$$

175. *Remarque.* — La fonction $\varphi(x)$ représente le *reste* de la série, ou l'erreur que l'on commet en s'arrêtant au terme $\frac{x^n}{n}$ (3). D'après l'inégalité (5), cette erreur est inférieure au premier des termes négligés : c'est ce qui a lieu pour toutes les séries convergentes, à termes alternativement positifs et négatifs (**22**).

Développement de $l(1-x)$.

176. La méthode précédente donne d'abord

$$-l(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant une fonction qui a pour dérivée $\frac{x^n}{1-x}$, et qui s'annule avec x.

En second lieu, si x varie de 0 à $1-\alpha$, α étant une fraction aussi petite qu'on le veut, on aura

$$\frac{x^n}{1-x}>0,\quad \frac{x^n}{1-x}<\frac{x^n}{\alpha};$$

ou

$$\psi'(x)>0,\quad \psi'(x)-\frac{x^n}{\alpha}<0.$$

Par suite,

$$\psi(x)>0,\quad \psi(x)<\frac{x^{n+1}}{\alpha(n+1)}.$$

La variable x étant inférieure à l'unité, la fraction $\frac{x^{n+1}}{\alpha(n+1)}$ diminue indéfiniment lorsque n augmente. Donc $\psi(x)$ jouit de la même propriété. Par conséquent, pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $1-\alpha$, *inclusivement*,

$$-l(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\ (^*).\quad (7)$$

177. Les formules (6), (7) peuvent servir à calculer les logarithmes *népériens* des nombres compris entre 0 et 2. Par exemple, si l'on suppose $x=1$ dans (6), on obtient

$$l.2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-,\ \ldots\ (^{**});$$

(*) La formule (7), obtenue en supposant $x<1$, subsiste pour $x=1$; car cette dernière hypothèse rend infinis les deux membres.

(**) On a vu (**12**) que

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n};$$

seulement, les séries (6), (7), même quand elles sont applicables, sont peu convergentes; et, d'un autre côté, il est essentiel de trouver des formules qui permettent de calculer les logarithmes des nombres entiers. C'est à quoi l'on parvient par les méthodes suivantes.

Calcul des logarithmes népériens.

178. Si l'on ajoute, membre à membre, les égalités (6), (7), on trouve, à cause de

$$\mathrm{l}(1+x)-\mathrm{l}(1-x)=\mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right):$$

$$\mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right]. \qquad (8)$$

Posons

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+p}{n};$$

nous aurons

$$\frac{2x}{2}=x=\frac{p}{2n+p};$$

puis, au lieu de la formule (8),

$$\mathrm{l}\left(\frac{n+p}{n}\right)=2\left[\frac{p}{2n+p}+\frac{1}{3}\left(\frac{p}{2n+p}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{p}{2n+p}\right)^5+\cdots\right],$$

ou

$$\mathrm{l}(n+p)=\mathrm{l}\,n+2\left[\frac{p}{2n+p}+\frac{1}{3}\left(\frac{p}{2n+p}\right)^3+\cdots\right]. \qquad (9)$$

Cette nouvelle formule sert à calculer le logarithme né-

donc, comme nous l'avons annoncé,

$$\lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\mathrm{l}.2.$$

périen d'un nombre entier $n + p$, quand on connaît déjà le logarithme de n. Si l'on suppose $p = 1$, elle se réduit à

$$l(n+1) = ln + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots\right]. \quad (10)$$

179. A cause de $l.1 = 0$, la relation (10) donne, de proche en proche, $l.2$, $l.3$, $l.4$, ...

En particulier,

$$l.2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \cdots\right],$$

ou

$$l.2 = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \frac{1}{7.9^3} + \cdots\right]. \quad (11)$$

180. Il est facile de trouver une limite supérieure de l'erreur E que l'on commet quand on réduit la série (10) à ses i premiers termes. En effet, on a d'abord

$$E = 2\left[\frac{1}{(2i+1)(2n+1)^{2i+1}} + \frac{1}{(2i+3)(2n+1)^{2i+3}} + \cdots\right];$$

et, par conséquent,

$$E < \frac{2}{(2i+1)(2n+1)^{2i+1}}\left[1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right];$$

ou, en sommant la progression,

$$E < \frac{2}{(2i+1)(2n+1)^{2i+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}};$$

ou enfin,

$$E < \frac{1}{2n(n+1)(2i+1)(2n+1)^{2i-1}}.$$

Par exemple, si l'on se borne aux *quatre* premiers termes, dans la formule (11), on commet une erreur moindre que

$\frac{1}{78732}$. Pour avoir la même approximation, au moyen du premier développement (177), on devrait employer 78 731 termes.

181. Des formules (8), (9), (10), on en peut tirer beaucoup d'autres, plus ou moins remarquables. Ainsi, quand on change n en n^2-1, dans la relation (10), on trouve, en supposant

$$S=1+\frac{1}{3(2n^2-1)^2}+\frac{1}{5(2n^2-1)^4}+\cdots:$$

$$1.n=\frac{1}{2}1(n^2-1)+\frac{1}{2n^2-1}S; \qquad (12)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$1(n+1)=2\,1n-1(n-1)-\frac{1}{2n^2-1}S. \qquad (13)$$

De ces deux nouvelles formules (*), la seconde sert à calculer le logarithme d'un nombre entier, quand on connaît déjà les logarithmes des deux nombres immédiatement précédents. La relation (12) peut servir à *déterminer le logarithme d'un nombre premier* n, *connaissant les logarithmes des facteurs premiers de* n^2-1 : ces facteurs sont, évidemment, moindres que n. De plus, la série S est, pour une même valeur de n, plus convergente que la série (10).

182. PROBLÈME. — *Calculer directement le logarithme d'un nombre donné.*

Si, dans la formule (8), on pose

$$\frac{1+x}{1+x}=\frac{n}{1},$$

on a

$$1n=2\left[\frac{n-1}{n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5+\cdots\right].$$

(*) Elles sont attribuées à Thomas Lavernède (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome X, p. 72).

Par exemple,

$$1.3 = 1 + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.4^2} + \frac{1}{7.4^3} +, \ldots,$$

$$1.4 = \frac{6}{5}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \cdots\right],$$

$$1.5 = \frac{4}{3}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots\right].$$

Ces séries sont de moins en moins convergentes.

Calcul du module.

182. Le *module* M des logarithmes vulgaires a pour valeur $\frac{1}{1.10}$ (**92**). Pour le calculer, il est donc essentiel de connaître le logarithme népérien de 10. Or, $1.10 = 1.2 + 1.5$; et, d'après la formule (10) :

$$1.5 = 1.4 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \cdots\right],$$

$$1.4 = 21.2 = 4\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \cdots\right];$$

donc

$$1.10 = 6\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \cdots\right]$$

$$+ 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \cdots\right],$$

ou

$$1.10 = 2\left[1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \frac{1}{7.9^3} + \cdots\right]$$

$$+ \frac{2}{9}\left[1 + \frac{1}{3.81} + \frac{1}{5.81^2} + \frac{1}{7.81^3} + \cdots\right].$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$\mathrm{l}.10 = 2,302\,585\,092\,994\,045,\ \ldots;$$

et, par suite,

$$\mathrm{M} = 0,434\,294\,481\,903\,251\ \ldots\ (^*).$$

Calcul des logarithmes vulgaires.

184. En multipliant par M les deux membres de l'égalité (10), on obtient

$$\log(n+1) = \log n + 2\mathrm{M}\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots\right]. \quad (14)$$

Cette formule est l'une des plus commodes dont on puisse faire usage pour construire une Table de logarithmes de Briggs, analogue à la Table de Callet. La formation d'une pareille table est bien plus rapide que celle d'une table de logarithmes népériens. En effet, si l'on a calculé les logarithmes *vulgaires* des nombres compris entre 10^{p-1} et 10^p, on aura, tout de suite (**95**), les logarithmes des nombres entiers, inférieurs à 10^{p-1}. En outre, la convergence de la série (14) augmente si rapidement avec n, qu'on peut souvent réduire cette série à son premier terme. En effet, si n surpasse 10 000, on trouve (**180**), à cause de $2\mathrm{M} < 1$, et en supposant $i = 1$:

$$\mathrm{E} < \frac{1}{120\,000 \,.\, 10\,001 \,.\, 20\,001};$$

ou, à plus forte raison,

$$\mathrm{E} < \frac{1}{24\,000\,000\,000\,000}.$$

(*) M. *Shanks*, calculateur anglais, a déterminé, avec 205 décimales, les nombres M et e.

185. *Remarque.* — Si, au lieu d'employer la méthode précédente, on applique, plusieurs fois de suite, la formule (12), on parvient à *décomposer le logarithme d'un nombre premier* n, *en la somme de plusieurs séries*, ordinairement très-convergentes. On a ainsi une seconde solution du problème ci-dessus (**182**). Par exemple,

$$\log 17 = \frac{16}{7}M\left[1 + \frac{1}{3.49} + \frac{1}{5.49^2} + \cdots\right]$$
$$+ \frac{9}{17}M\left[1 + \frac{1}{3.289} + \frac{1}{5.289^2} + \cdots\right]$$
$$+ \frac{1}{577}M\left[1 + \frac{1}{3.332\,929} + \frac{1}{5.332\,929^2} + \cdots\right].$$

186. *Proportion logarithmique.* — En général, on admet que, *passé une certaine limite, les différences entre les nombres sont, à peu près, proportionnelles aux différences entre les logarithmes de ces nombres* (**100**). Cette proposition résulte immédiatement de ce qui précède. En effet, si l'on ne prend qu'un terme dans la série (14), on a

$$\log(n+1) - \log n = 2M\frac{1}{2n+1}.$$

De même, k étant une fraction proprement dite,

$$\log(n+k) - \log n = 2M\frac{k}{2n+k}.$$

Par suite,

$$\frac{\log(n+k) - \log n}{\log(n+1) - \log n} = k\frac{2n+1}{2n+k}.$$

Mais, le nombre n étant très-grand, la fraction $\frac{2n+1}{2n+k}$ est presque égale à l'unité; donc, à fort peu près,

$$\frac{\log(n+k) - \log n}{\log(n+1) - \log n} = \frac{k}{1}. \qquad (15)$$

187. *Limites de l'erreur.* — Soient

$$\log(n+k) - \log n = \delta, \quad \log(n+1) - \log n = \Delta,$$
$$k\Delta = \delta_1, \quad \varepsilon = \delta - \delta_1 :$$

ε est l'erreur que l'on commet sur $\log(n+k)$, quand on fait usage de la proportion (15). Or (**174**) :

$$\delta = \log\left(1+\frac{k}{n}\right) = \mathrm{M}\left[\frac{k}{n} - \frac{k^2}{2n^2} + \frac{k^3}{3n^3} - \cdots\right],$$
$$\delta_1 = k\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \mathrm{M}\left[\frac{k}{n} - \frac{k}{2n^2} + \frac{k}{3n^3} - \cdots\right];$$

donc

$$\varepsilon = \mathrm{M}\left[\frac{k-k^2}{2n^2} - \frac{k-k^3}{3n^3} + \cdots\right].$$

Les termes de la série, qui décroissent indéfiniment, sont alternativement positifs et négatifs, donc (**21**)

$$\varepsilon > 0, \quad \varepsilon < \frac{\mathrm{M}k(1-k)}{2n^2}. \tag{16}$$

1° La première inégalité équivaut à $\delta > \delta_1$, ou à

$$\log(n+k) > \log n + \delta_1;$$

ainsi, *la valeur exacte du logarithme de* n + k, *est supérieure à celle qui résulte de la proportion logarithmique.*

2° La somme des facteurs k, $1-k$ étant égale à 1, le maximum du produit est $\frac{1}{4}$ (*) ; donc

$$\varepsilon < \frac{\mathrm{M}}{8n^2} < \frac{1}{16n^2}; \tag{17}$$

et, si n surpasse 10 000, ce que l'on peut toujours admettre,

$$\varepsilon < \frac{1}{1\,600\,000\,000}.$$

(*) (*B. Alg.*, 145).

Conséquemment, *quand on suppose*

$$\log(n+k) = \log n + \delta_1 = \log n + k\Delta,$$

l'erreur ε *est moindre qu'une unité du neuvième ordre décimal.*

188. Si l'on veut *trouver le nombre correspondant à un logarithme donné* (**101**), et que l'on fasse usage de la proportion logarithmique, on commet une autre erreur ε_1, dont il est également facile d'avoir des limites. Remarquons d'abord que, le nombre inconnu étant $n+k$, on le suppose égal à $n+\frac{\delta}{\Delta}$; donc

$$\varepsilon_1 = k - \frac{\delta}{\Delta} = \frac{\delta_1 - \delta}{\Delta} = -\frac{\varepsilon}{\Delta}.$$

1° D'après la première des inégalités (16), on a $\varepsilon_1 < 0$: *la valeur exacte du nombre correspondant à* $\log(n+k)$, *est inférieure à celle qui résulte de la proportion.*

2° Le développement de $\Delta = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ donne

$$\Delta > M\frac{2n-1}{2n^2};$$

donc, à cause de l'inégalité (17) :

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{4(2n-1)},$$

en valeur absolue; et, si n surpasse 10 000 :

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{80\,000} < \frac{2}{100\,000},$$

également en valeur absolue. Ainsi, *quand on prend* $k = \frac{\delta}{\Delta}$, *l'erreur* ε_1 *est moindre que deux unités du cinquième ordre décimal.*

Développement de arc tang x.

189. La fonction arc tg x a pour dérivée $\frac{1}{1+x^2}$. Or

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \pm x^{2n-2} \mp \frac{x^{2n}}{1+x^2};$$

donc, en désignant par $\varphi(x)$ une fonction qui s'annule avec x, et qui a pour dérivée $\frac{x^{2n}}{1+x^2}$,

$$\text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \mp \varphi(x).$$

On trouve ensuite, en raisonnant comme on l'a fait dans les n^os **174** et **176** :

$$\varphi(x) > 0, \quad \varphi(x) < \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Si donc x est compris entre $+1$ et -1, *inclusivement*, $\lim \varphi(x) = 0$, ou

$$\text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (18)$$

Calcul du rapport de la circonférence au diamètre.

190. La série (18), et celles que l'on en déduit, servent à calculer, avec une approximation indéfinie, le nombre *incommensurable* π (*).

1° Si l'on suppose d'abord $x = 1$, on a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \qquad (19)$$

Cette série, très-peu convergente, est attribuée à Leibniz.

(*) *Lambert* a démontré, le premier, cette incommensurabilité (*Géométrie de Legendre*, Note IV).

2° Soit

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\, x + \text{arc tg}\, y = \text{arc tg}\, \frac{x+y}{1-xy};$$

d'où, à cause de $\text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$,

$$1 - xy = x + y;$$

équation *indéterminée*. Pour y satisfaire, on peut prendre

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

Par suite,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.4^2} - \frac{1}{7.4^3} + \cdots\right) \\ + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} - \frac{1}{7.9^3} + \cdots\right). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Cette nouvelle formule, due à Euler, donne le nombre π par la somme de deux séries ; elle est déjà beaucoup plus commode que la formule (19).

3° Désignons par α l'arc dont la tangente est $\frac{1}{5}$. Nous aurons

$$\text{tg}\, 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \text{tg}\, 4\alpha = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}.$$

Cette dernière fraction étant fort petite, l'arc 4α surpasse $\frac{\pi}{4}$ d'un très-petit arc β, déterminé par

$$\text{tg}\, \beta = \frac{\text{tg}\, 4\alpha - 1}{1 + \text{tg}\, 4\alpha} = \frac{\frac{1}{119}}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Mais
$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = \text{arc tg}\frac{1}{5} - \text{arc tg}\frac{1}{239};$$

donc, par la série (18),

$$\frac{\pi}{4} = \left\{ \begin{array}{l} 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) \\ - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} + \ldots\right); \end{array} \right.$$

ou

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{5}\left[1 - \frac{4}{3.100} + \frac{4^2}{5.100^2} - \ldots\right]$$
$$- \frac{1}{239}\left[1 - \frac{1}{3.57\,121} + \frac{1}{5.57\,121^2} - \ldots\right].$$

De cette dernière formule, trouvée par le Géomètre anglais *Machin*, on a conclu la valeur de π avec 100, 200 et enfin 707 chiffres décimaux (*).

Exercices.

I. Développer, suivant les puissances croissantes de x,

$$-\,\mathrm{l}(1-x) - \mathrm{l}(1-x^2) - \mathrm{l}(1-x^3) - \ldots,$$

et prouver que la série est convergente ($0 < x < 1$) (**).

II. Développer

$$\mathrm{l}\frac{1+x}{1-x+x^2}, \quad \mathrm{l}\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}.$$

(*) Le dernier calcul, plus pénible qu'utile, a été effectué par M. *W. Shanks*.

(**) Dans cette série, le coefficient de x^n est

$$\frac{1}{n}\int n,$$

$\int n$ désignant, d'après Euler, la *somme des diviseurs de* n.

III. Conclure, du premier de ces deux développements,

$$\mathrm{l}.2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{4.5} + \frac{1}{7.8} - \frac{1}{10.11} + \frac{1}{13.14} - \cdots\right).$$

IV. Vérifier les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{l}.10 = {} & \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \cdots\right) \\ & + \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{3.25} + \frac{1}{5.25^2} + \cdots\right) \\ & + \frac{2}{19}\left(1 + \frac{1}{3.361} + \frac{1}{5.361^2} + \cdots\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{l}.10 = {} & 2\left(1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \cdots\right) \\ & + \frac{2}{17}\left(1 + \frac{1}{3.289} + \frac{1}{5.289^2} + \cdots\right) \\ & + \frac{2}{19}\left(1 + \frac{1}{3.361} + \frac{1}{5.361^2} + \cdots\right). \end{aligned}$$

V. Vérifier les formules

$$\frac{1}{4}\mathrm{l}2 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)} + \cdots,$$

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{3.5.9} + \cdots + \frac{1}{n(2n-1)(4n-3)} + \cdots.$$

VI. En partant de la relation

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p+d} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p+d'},$$

dans laquelle $dd' = p^2 + 1$, vérifier les valeurs suivantes :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8},$$

$$\frac{\pi}{4} = 5\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{26} - 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2\,057}.$$

VII. Au moyen de la relation

$$\text{arc tg}\frac{1}{2n-1} - \text{arc tg}\frac{1}{2n+1} = \text{arc tg}\frac{1}{2n^2},$$

démontrer que

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\frac{1}{2} + \text{arc tg}\frac{1}{8} + \cdots + \text{arc tg}\frac{1}{2n^2} + \cdots$$

VIII. $\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\frac{1}{3} + \text{arc tg}\frac{1}{7} + \cdots + \text{arc tg}\frac{1}{n^2+n+1} + \cdots$

IX. Prouver la divergence de la série

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \frac{1}{3}\frac{\sin 3x}{\cos^3 x} + \cdots$$

X. Vérifier les relations

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\text{arc sin } x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3.5}x^4 - \frac{2.4}{3.5.7}x^6 - \cdots,$$

$$\frac{\text{arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}x^7 + \cdots$$

XI. Conclure, de la seconde,

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \cdots$$

III.

IMAGINAIRES.

CHAPITRE XI.

CALCUL DES IMAGINAIRES.

Préliminaires.

191. On sait, par les éléments de l'Algèbre (*), que l'on appelle *expression imaginaire* (**), ou, simplement, *imaginaire*, toute expression de la forme $\alpha \pm \sqrt{-\beta^2}$, dans laquelle le radical porte sur une *quantité essentiellement négative* $(-\beta^2)$.

Si l'on convient d'étendre aux imaginaires les règles démontrées pour les *quantités réelles* (***), on aura

$$\sqrt{-\beta^2}=\sqrt{-1}\times\sqrt{\beta^2}=\sqrt{-1}\times\beta=\beta\sqrt{-1},$$

et

$$\alpha\pm\sqrt{-\beta^2}=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}:$$

c'est à cette dernière forme que l'on essaie toujours de ramener toute expression qui ne représente pas une quantité réelle.

(*) (*B. Alg.*, 119, 132).

(**) Nous n'avons pas cru devoir adopter la dénomination de *quantité imaginaire*, bien qu'elle soit employée dans des ouvrages justement estimés. Il nous semble qu'*une expression purement symbolique, qui ne peut représenter aucune grandeur, n'est pas une quantité.*

(***) D'après la note précédente, il suffirait de dire : les règles démontrées pour les *quantités*.

192. Si, dans l'expression $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, on suppose $\beta = 0$, elle se réduit à α (*). Par conséquent, *les imaginaires comprennent, comme cas particulier, les quantités réelles.*

193. Deux imaginaires sont dites *conjuguées* lorsqu'elles diffèrent seulement par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$: telles sont $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$.

194. On appelle *module* d'une expression imaginaire *la racine carrée de la somme des carrés de la partie réelle et du coefficient de* $\sqrt{-1}$, cette racine étant prise *positivement.* Par exemple, le module de $5 + 12\sqrt{-1}$ est $m = +\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. *Deux imaginaires conjuguées ont même module.*

195. Lemme I. — *L'équation* $\alpha + \beta\sqrt{-1} = 0$ *se décompose en* $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

En effet, il ne peut s'opérer aucune réduction entre la *quantité* α et le *symbole* $\beta\sqrt{-1}$.

196. Lemme II. — *L'équation*

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

se décompose en $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$.

La démonstration est la même que celle du premier lemme (**).

(*) En effet, d'après la convention précédente, $\beta\sqrt{-1} = \sqrt{-\beta^2}$; et $-\beta^2$ s'annule en même temps que β.

(**) Il serait peut-être plus exact de considérer ces deux lemmes comme de simples *demandes*. En effet, l'*explication* relative au premier lemme ne peut passer pour une véritable *démonstration*. Dans un ordre d'idées que nous n'avons pas cru devoir adopter, on regarde le Lemme II (qui comprend le Lemme I) comme une *définition* du symbole $\sqrt{-1}$. Enfin, depuis un certain nombre d'années, les imaginaires sont considérées, par quelques Géomètres, comme des *quantités complexes*, représentant des *distances comptées, à partir de l'origine, sur des droites inclinées à l'axe*

197. Théorème I. — *Pour qu'une expression imaginaire soit nulle, il faut et il suffit que son module soit nul.*

1° Si l'imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ est nulle, on a

$$\alpha = 0,\ \beta = 0\ (\mathbf{195});\ \text{donc}\ m^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 0,\ m = 0.$$

2° Si le module est nul, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$; donc $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Addition et soustraction des imaginaires.

198. En opérant sur les imaginaires comme sur des quantités, c'est-à-dire en regardant $\sqrt{-1}$ comme un coefficient, on obtient

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=(\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')\sqrt{-1}, \quad (1)$$

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})-(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta')\sqrt{-1}; \quad (2)\ (*)$$

et, en particulier :

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\alpha-\beta\sqrt{-1})=2\alpha, \quad (3)$$

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})-(\alpha-\beta\sqrt{-1})=2\beta\sqrt{-1}. \quad (4)$$

199. *Remarques.* — I. Si la soustraction conduit à un *reste* nul, on a, d'après l'égalité (2) et le Lemme I : $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. On vérifie donc que *toute équation, de la forme* $A + B\sqrt{-1} = A' + B'\sqrt{-1}$, *se partage en* $A = A'$, $B = B'$.

II. D'après les égalités (3), (4) : 1° *La somme de deux imaginaires conjuguées est toujours réelle ; 2° La différence de deux imaginaires conjuguées a la forme* $B\sqrt{-1}$.

des abscisses. Le lecteur peut consulter, sur ce sujet, le savant ouvrage de M. Hoüel, intitulé : *Théorie élémentaire des quantités complexes ;* puis, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, de remarquables articles d'Abel Transon, ingénieux Géomètre, récemment enlevé à la science.

(*) Les égalités (1), (2) pourraient être regardées comme des *définitions*.

Multiplication des imaginaires.

200. Continuant à étendre aux imaginaires les règles ordinaires du calcul, et faisant attention que $(\sqrt{-1})^2 = -1$; on trouve

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1}) = \alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta'+\alpha'\beta)\sqrt{-1}. \quad (5)$$

201. Si le second facteur est conjugué du premier, le produit devient $\alpha^2 - (\beta\sqrt{-1})^2 = \alpha^2 + \beta^2$; ainsi *le produit de deux imaginaires conjuguées est égal au carré du module commun.*

202. Théorème II. — *Le module d'un produit est égal au produit des modules des facteurs.*

Considérons d'abord un produit de deux facteurs. En conservant les notations précédentes, et en appelant M le module du produit, nous avons, par l'égalité (5) :

$$m = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad m' = +\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2},$$
$$M = +\sqrt{(\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2}.$$

Il faut prouver que $mm' = M$. Or, en effectuant et réduisant, on trouve

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) = (\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2; \quad (6)$$

donc, etc.

Au moyen du raisonnement connu, on étend la proposition au cas d'un nombre quelconque de facteurs.

203. *Remarques.* — I. L'égalité (6) démontre ce théorème d'arithmétique :

Le produit de deux nombres, égaux, chacun, à la somme de deux carrés, est égal à la somme de deux carrés.

Par exemple,

$$(3^2 + 2^2)(5^2 + 7^2) = (3 . 5 - 2 . 7)^2 + (3 . 7 + 2 . 5)^2,$$

ou $$13 . 74 = 1^2 + 31^2.$$

II. Plus généralement, d'après le Théorème II : *le produit de plusieurs nombres, égaux, chacun, à la somme de deux carrés, est égal à la somme de deux carrés.*

Exemple :

$$(3^2 + 2^2)(5^2 + 7^2)(1^2 + 3^2) = 46^2 + 17^2.$$

III. Le second membre de l'égalité (6) peut être écrit ainsi :

$$(\alpha\alpha' + \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' - \alpha\beta')^2.$$

Conséquemment, *il y a toujours au moins deux manières de décomposer, en une somme de deux carrés, le produit de deux nombres, égaux, chacun, à la somme de deux carrés* (*).

204. Théorème III. — *Pour qu'un produit de facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit qu'un des facteurs soit nul.*

Considérons, pour fixer les idées, le produit $P = ff'f''$.

Soient m, m', m'' les modules des facteurs, M étant le module de P.

1° Si ce produit est nul, $M = 0$ (**197**); ou, par le théorème précédent, $mm'm'' = 0$. Cette égalité, dans laquelle m, m', m'', sont des facteurs réels, exige qu'un d'eux au moins soit nul. Soit m ce facteur nul; alors $f = \alpha + \beta\sqrt{-1} = 0$ (**197**).

2° Si un facteur de P, f par exemple, est nul, le module correspondant, m, est nul. Donc $M = mm'm'' = 0$; puis (**197**) $P = 0$.

(*) De là résulte qu'*un produit de trois facteurs de la forme indiquée, est décomposable, au moins de quatre manières, en deux carrés*; qu'*un produit de quatre facteurs de cette même forme, est décomposable en deux carrés, d'au moins huit manières*; etc. Cette simple énumération peut déjà faire prévoir l'utilité des imaginaires.

Division des imaginaires.

205. Soit à diviser $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ par $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$: il s'agit de trouver une imaginaire $x + y\sqrt{-1}$ qui, multipliée par le diviseur, reproduise le dividende.

L'équation

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = (\alpha' + \beta'\sqrt{-1})(x + y\sqrt{-1})$$

se décompose (**196**) en

$$\alpha = \alpha' x - \beta' y,$$
$$\beta = \beta' x + \alpha' y.$$

Ces deux équations donnent

$$x = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}, \quad y = \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}.$$

Donc

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\alpha' + \beta'\sqrt{-1}} = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2} + \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}\sqrt{-1}. \quad (7)$$

206. *Remarques.* — I. On arrive plus rapidement à ce résultat en multipliant les deux termes de la *fraction*

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\alpha' + \beta'\sqrt{-1}}$$

par l'imaginaire $\alpha' - \beta'\sqrt{-1}$, conjuguée du dénominateur.

II. Le quotient (7) est *fini*, excepté quand le diviseur est nul.

III. Ce quotient est *réel* si

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}.$$

Puissances d'une imaginaire.

207. Par définition (**191**), les puissances successives de $\sqrt{-1}$ sont $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$, $+1$; donc, m étant entier positif (**47**) :

$$\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)^m=\alpha^m+\frac{m}{1}\alpha^{m-1}\beta\sqrt{-1}-\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^{m-2}\beta^2$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha^{m-3}\beta^3\sqrt{-1}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\alpha^{m-4}\beta^4+\cdots$$

De même,

$$\left(\alpha-\beta\sqrt{-1}\right)^m=\alpha^m-\frac{m}{1}\alpha^{m-1}\beta\sqrt{-1}-\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^{m-2}\beta^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha^{m-3}\beta^3\sqrt{-1}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\alpha^{m-4}\beta^4-\cdots$$

208. *Remarques.* — I. Si l'on pose, pour abréger :

$$A=\alpha^m-C_{m,2}\alpha^{m-2}\beta^2+C_{m,4}\alpha^{m-4}\beta^4-\cdots,$$
$$B=C_{m,1}\alpha^{m-1}\beta-C_{m,3}\alpha^{m-3}\beta^3+\cdots,$$

on a

$$\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)^m=A+B\sqrt{-1},\quad \left(\alpha-\beta\sqrt{-1}\right)^m=A-B\sqrt{-1}.\quad (8)$$

II. Ces deux égalités, multipliées membre à membre, donnent celle-ci :

$$(\alpha^2+\beta^2)^m=A^2+B^2.$$

Ainsi, *les puissances successives d'un nombre égal à la somme de deux carrés sont égales, chacune, à la somme de deux carrés* (*).

(*) Ce théorème est un cas particulier de celui que nous avons démontré ci-dessus (**202**).

Racine carrée d'une imaginaire.

209. Pour ramener l'expression $\sqrt{\alpha \pm \beta\sqrt{-1}}$ à la forme $\alpha' \pm \beta'\sqrt{-1}$, il suffit d'employer la relation connue

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

et de supposer $A = \alpha$, $B = -\beta^2$. On obtient ainsi

$$\sqrt{\alpha \pm \beta\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}\sqrt{-1}. \quad (9)$$

210. *Remarque. — La somme des racines carrées de deux imaginaires conjuguées est toujours réelle.*

Développements de $f(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})$.

211. Si $f(\alpha)$ est un polynôme entier, *à coefficients réels*, l'application du Théorème de Taylor (**159**) donne, immédiatement,

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta\sqrt{-1}) &= f(\alpha) + \frac{\beta}{1} f'(\alpha)\sqrt{-1} - \frac{\beta^2}{1.2} f''(\alpha) \\ &\quad - \frac{\beta^3}{1.2.3} f'''(\alpha)\sqrt{-1} + \frac{\beta^4}{1.2.3.4} f^{\text{IV}}(\alpha) + \cdots \\ &= \left[f(\alpha) - \frac{\beta^2}{1.2} f''(\alpha) + \frac{\beta^4}{1.2.3.4} f^{\text{IV}}(\alpha) - \cdots \right] \\ &\quad + \left[f'(\alpha) - \frac{\beta^2}{1.2.3} f'''(\alpha) + \cdots \right] \beta\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

ou, si l'on représente par A, B *des quantités réelles, ne contenant aucune puissance impaire de* β :

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = A + B\beta\sqrt{-1}.$$

Le changement de β en $-\beta$ n'altère ni A ni B ; donc

$$f(\alpha-\beta\sqrt{-1})=\mathrm{A}-\mathrm{B}\beta\sqrt{-1}.$$

212. ***Remarques.*—I. *Les développements de* $f(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})$ *sont des imaginaires conjuguées.***

II. $f(\alpha+\beta\sqrt{-1})+f(\alpha-\beta\sqrt{-1})$ *est une quantité réelle* (**199**, II), *qui ne renferme aucune puissance impaire de* β.

Équations bicarrées.

213. Les racines de l'équation

$$x^4+px^2+q=0, \qquad (10)$$

sont données par la formule

$$x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}}. \qquad (11)$$

Si le binôme $\frac{1}{4}p^2-q$ est négatif, les deux valeurs de x^2 devenant imaginaires, il y a lieu d'appliquer la transformation donnée ci-dessus (**209**). Faisant

$$\alpha=-\frac{1}{2}p, \quad -\beta^2=\frac{1}{4}p^2-q,$$

on trouve, au lieu des valeurs (11) :

$$x=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{-p+2\sqrt{q}}\pm\sqrt{p+2\sqrt{q}}.\sqrt{-1}\right). \qquad (12)$$

Par exemple, l'équation

$$x^4+2x^2+3=0$$

a pour racines

$$\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{-2+2\sqrt{3}}\pm\sqrt{2+2\sqrt{3}}\sqrt{-1}\right).$$

De même, les racines de l'équation

$$x^4 + 1 = 0,$$

c'est-à-dire *les quatre valeurs de* $\sqrt[4]{-1}$, sont données par la formule

$$x = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{2} \pm \sqrt{2}.\sqrt{-1}),$$

que l'on peut réduire à

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}(1 \pm \sqrt{-1}).$$

214. *Remarque.* — La formule (12) étant assez compliquée, il est utile, pour soulager la mémoire, de pouvoir la retrouver rapidement, dans chaque cas particulier. C'est à quoi l'on parvient comme il suit :

Après avoir transposé le terme px^2, ajoutons, aux deux membres de l'équation (10), la quantité $2x^2\sqrt{q}$: le premier membre devient $(x^2 + \sqrt{q})^2$; en sorte que

$$(x^2 + \sqrt{q})^2 = x^2(-p + 2\sqrt{q});$$

ou, en extrayant les racines,

$$x^2 + \sqrt{q} = \pm x\sqrt{-p + 2\sqrt{q}}.$$

L'équation proposée est donc *remplacée* par les deux équations du second degré :

$$\left.\begin{aligned} x^2 - x\sqrt{-p + 2\sqrt{q}} + \sqrt{q} = 0, \\ x^2 + x\sqrt{-p + 2\sqrt{q}} + \sqrt{q} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

La formule ordinaire, appliquée aux équations (13), reproduit les valeurs (12).

215. *Autres remarques.* — I. En multipliant membre

à membre ces dernières équations, on retombe sur la proposée (10), c'est-à-dire que

$$x^4 + px^2 + q$$
$$= \left(x^2 - x\sqrt{-p+2\sqrt{q}} + \sqrt{q}\right)\left(x^2 + x\sqrt{-p+2\sqrt{q}} + \sqrt{q}\right).$$

Il est donc facile de *décomposer le trinôme* $x^4 + px^2 + q$ *en deux facteurs réels du second degré* (*). Par exemple,

$$x^4 + 1 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1).$$

II. L'*artifice* précédent est applicable à la *Théorie des nombres*. Pour décomposer, en deux facteurs,

$$N = 2^{4k+2} + 1,$$

il suffit d'observer que l'on a, *identiquement*,

$$2^{4k+2} + 1 = (2^{2k+1} + 1)^2 - 2^{2k+2}.$$

Ainsi

$$N = (2^{2k+1} + 2^{k+1} + 1)(2^{2k+1} - 2^{k+1} + 1).$$

Soit, par exemple, $k = 16$. Alors

$$N = 2^{66} + 1 = 73\,786\,976\,294\,838\,206\,465;$$

et ce nombre est décomposable en

$$4\,295\,098\,369 \times 4\,294\,836\,225 \text{ (**)}.$$

Exercices.

I. Le module de la somme de deux imaginaires est compris entre la somme et la différence de leurs modules.

(*) A cause de $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$, on a $q > 0$, $-p + 2\sqrt{q} > 0$.

(**) Conformément à la réciproque d'un théorème démontré ci-dessus (202), *chacun des facteurs*

$$2^{2k+1} + 2^{k+1} + 1, \quad 2^{2k+1} - 2^{k+1} + 1$$

est une somme de deux carrés; savoir

$$(2^k)^2 + (2^k + 1)^2, \quad (2^k)^2 + (2^k - 1)^2.$$

II. Décomposer le produit 13.37.61 en une somme de deux carrés.

III. Réduire, à la forme *normale*,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1}}} \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2 - 2ab\sqrt{-1}}}.$$

IV. Trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $y = \text{arc tg}\, x$, en partant de la formule

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 + x\sqrt{-1}} + \frac{1}{1 - x\sqrt{-1}}\right]. \ (*)$$

V. Si l'*on convient* d'appeler *logarithme népérien* de u la fonction dont la dérivée est $\frac{u'}{u}$, et qui s'annule pour $u = 1$, on a, par la formule précédente,

$$\text{arc tg}\, x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, \mathrm{l}\, \frac{1 + x\sqrt{-1}}{1 - x\sqrt{-1}},$$

ou

$$y = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, \mathrm{l}\, \frac{\cos y + \sqrt{-1}\sin y}{\cos y - \sqrt{-1}\sin y}.$$

Cela posé, comment peut-on conclure, de la dernière équation, d'abord l'*équation d'Euler* :

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}\sin y,$$

puis les formules

$$\cos y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\text{tg}\, y = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}? \ (**)$$

(*) On pourra comparer la valeur de $y^{(n)}$ avec celle qui est indiquée à la page 140.

(**) La signification précise de ces diverses relations sera expliquée dans le *Calcul différentiel*. Nous ne les donnons ici qu'afin d'habituer le lecteur au calcul des imaginaires.

CHAPITRE XII.

IMAGINAIRES TRIGONOMÉTRIQUES.

Préliminaires.

216. THÉORÈME I. — *Toute imaginaire est réductible à la forme* $\rho\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$, *$\rho$ étant le module, et φ, un arc moindre que la circonférence.*

L'équation

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right) \qquad (1)$$

étant décomposée (**196**) en

$$\alpha = \rho\cos\varphi,\quad \beta = \rho\sin\varphi,$$

on conclut, de ces deux équations,

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad (2)$$

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\rho},\quad \sin\varphi = \frac{\beta}{\rho}. \qquad (3)$$

Si l'on convient de prendre positivement le radical, de manière que ρ soit le *module* de l'imaginaire donnée, les formules (3) détermineront, *en grandeur et en signe*, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. Or, entre 0 et 2π, il n'existe pas deux arcs ayant, à la fois, même cosinus et même sinus. L'arc φ, auquel on donne le nom d'*argument* de l'imaginaire, est donc déterminé, si on le suppose compris entre ces deux limites.

217. THÉORÈME II. — *L'argument d'un produit est égal à la somme des arguments des facteurs.*

Considérons d'abord le cas d'un produit de deux facteurs; et, pour plus de simplicité, faisons abstraction des modules, de manière que ce produit soit

$$P = \left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)\left(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi'\right).$$

En appliquant les règles indiquées précédemment, on trouve

$$P=(\cos\varphi\cos\varphi'-\sin\varphi\sin\varphi')+(\cos\varphi\sin\varphi'+\sin\varphi\cos\varphi')\sqrt{-1};$$

ou, par des formules connues (*),

$$P=\cos(\varphi+\varphi')+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi').$$

Le théorème énoncé est donc démontré si le produit a deux facteurs seulement. Pour passer au cas de trois facteurs, il suffit de multiplier, par le troisième facteur, les deux membres de l'égalité précédente. En effet,

$$\begin{aligned}&(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi'+\sqrt{-1}\sin\varphi')(\cos\varphi''+\sqrt{-1}\sin\varphi'')\\ &=[\cos(\varphi+\varphi')+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi')](\cos\varphi''+\sqrt{-1}\sin\varphi'')\\ &=\cos(\varphi+\varphi'+\varphi'')+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi'+\varphi'');\end{aligned}$$

etc.

218. Corollaire. — *L'argument d'un quotient est égal à l'argument du dividende, moins l'argument du diviseur.*

Formule de Moivre.

219. Si, dans l'égalité

$$\begin{aligned}&(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi'+\sqrt{-1}\sin\varphi')(\cos\varphi''+\sqrt{-1}\sin\varphi'')\ldots\\ &=\cos(\varphi+\varphi'+\cdots)+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi'+\cdots),\end{aligned}$$

on suppose les arguments égaux entre eux, et en nombre m, on a la relation

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^m=\cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi, \quad (4)$$

connue sous le nom de *Formule de Moivre* (**). Elle subsiste, moyennant certaines restrictions, pour les valeurs fractionnaires ou négatives de l'exposant m.

(*) (*B., Trig.*).

(**) Abraham Moivre, né à Vitry-le-François, en 1667; mort à Londres, en 1754.

Développements de sin $m\varphi$ et de cos $m\varphi$.

220. L'exposant m étant supposé entier positif, développons le premier membre de l'équation (4); puis égalons les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$. Il vient ainsi

$$\cos m\varphi = \cos^m \varphi - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi + \cdots \quad (5)$$

$$\sin m\varphi = \frac{m}{1}\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi + \cdots (6)$$

On voit que cos $m\varphi$ et sin $m\varphi$ s'expriment, rationnellement, en fonction de cos φ et de sin φ. Pour toute valeur entière de m, chacun des deux développements a un nombre limité de termes. Par exemple,

$$\cos 7\varphi = \cos^7\varphi - 21\cos^5\varphi\sin^2\varphi + 35\cos^3\varphi\sin^4\varphi - 7\cos\varphi\sin^6\varphi,$$
$$\sin 7\varphi = 7\cos^6\varphi\sin\varphi - 35\cos^4\varphi\sin^3\varphi + 21\cos^2\varphi\sin^5\varphi - \sin^7\varphi\ (*).$$

Séries imaginaires.

221. *Définition. — Une série dont le terme général a la forme* $\alpha_n + \beta_n\sqrt{-1}$ *est dite convergente, lorsque les deux séries*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots,$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n + \cdots$$

sont convergentes.

On voit que les conditions de convergence d'une série imaginaire donnée se ramènent, immédiatement, aux conditions de convergence de deux séries réelles. La proposition suivante réduit souvent l'examen de la série proposée à celui d'*une seule série réelle.*

222. Théorème III. — *Une série imaginaire est conver-*

(*) On peut aussi exprimer $\cos^m \varphi$ et $\sin^m \varphi$ en fonction des sinus et des cosinus des multiples de φ. Cette seconde question, moins utile que la première, conduit à des formules un peu compliquées. Le lecteur pourra consulter, sur ce sujet, le *Cours d'analyse de Sturm.*

gente si la série formée par les modules de ses termes est convergente.

Si l'on met le terme général, $\alpha_n + \beta_n \sqrt{-1}$, sous la forme $\rho_n (\cos \omega_n + \sqrt{-1} \sin \omega_n)$, les trois séries réelles dont il s'agit deviennent

$$\begin{array}{l} \rho_1 \cos \omega_1 + \rho_2 \cos \omega_2 + \cdots + \rho_n \cos \omega_n + \cdots, \\ \rho_1 \sin \omega_1 + \rho_2 \sin \omega_2 + \cdots + \rho_n \sin \omega_n + \cdots, \\ \rho_1 \qquad\quad + \rho_2 \qquad\quad + \cdots + \rho_n \qquad\quad + \cdots \end{array}$$

Or, si cette dernière série, *dont tous les termes sont positifs*, est convergente, les deux autres le sont pareillement (8).

222. *Remarques.*—I. *Si le module ρ_n n'a pas pour limite zéro, la série proposée est divergente ou indéterminée.*

En effet, à cause de

$$\rho_n^2 = \alpha_n^2 + \beta_n^2,$$

une au moins, des quantités α_n, β_n, n'a pas pour limite zéro.

II. *Si le module ρ_n a pour limite zéro, et que la série des modules soit divergente, la série proposée peut être convergente.*

Par exemple, la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\cos \frac{n\pi}{2} + \sqrt{-1} \sin \frac{n\pi}{2}\right],$$

est convergente, bien que *la série des modules*

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

soit divergente (*).

(*) A cause de $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = l2,$$

et de $$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4},$$

la série proposée a pour somme

$$-\frac{1}{2} l2 + \frac{\pi}{4}\sqrt{-1}.$$

Exercices.

I. n désignant un nombre impair, non divisible par 3, $(x+1)^n - x^n - 1$ s'annule pour

$$x = \cos\frac{2\pi}{3} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

II. Dans le développement de $(1+x)^m$, on prend les termes de p en p. Quelle est la somme de leurs coefficients?

III. Démontrer les *formules de Lagrange* :

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\cos m\varphi = 1 - \frac{m.m}{1.2}\cos^2\varphi + \frac{(m+2)m.m(m-2)}{1.2.3.4}\cos^4\varphi - \frac{(m+4)(m+2)m.m(m-2)(m-4)}{1.2.3.4.5.6}\cos^6\varphi + \cdots,$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}+1}\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi} = \frac{m}{1}\cos\varphi - \frac{(m+2)m(m-2)}{1.2.3}\cos^3\varphi + \frac{(m+4)(m+2)m(m-2)(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^5\varphi - \cdots;$$

(m *pair*)

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cos m\varphi = \frac{m}{1}\cos\varphi - \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\cos^3\varphi + \frac{(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3)}{1.2.3.4.5}\cos^5\varphi - \cdots,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi} = 1 - \frac{(m+1)(m-1)}{1.2}\cos^2\varphi + \frac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^4\varphi - \cdots$$

(m *impair*)

IV. Théorème. — *Si aucune des séries*

$$\cos\omega_1 + \cos\omega_2 + \cdots + \cos\omega_n + \cdots,$$
$$\sin\omega_1 + \sin\omega_2 + \cdots + \sin\omega_n + \cdots$$

n'est divergente, et que les modules

$$\rho_1, \quad \rho_2, \ldots, \quad \rho_n, \ldots$$

décroissent indéfiniment, les deux séries

$$\rho_1 \cos \omega_1 + \rho_2 \cos \omega_2 + \cdots + \rho_n \cos \omega_n + \cdots$$
$$\rho_1 \sin \omega_1 + \rho_2 \sin \omega_2 + \cdots + \rho_n \sin \omega_n + \cdots$$

sont convergentes.

V. Simplifier, au moyen de la formule de Moivre, l'expression de la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $y = \operatorname{arc\,tg} x$ (*), et vérifier que

$$y^{(n)} = 1.2.3 \ldots (n-1) \cos^n y \cos\left(ny + \frac{n-1}{2}\pi\right) \text{ (**)}.$$

VI. De l'équation

$$\rho\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right) = \operatorname{tg}\left(y + z\sqrt{-1}\right),$$

tirer

$$\operatorname{tg} 2y = -\frac{2\rho\cos\varphi}{\rho^2 - 1}, \quad z = \frac{1}{4}\,l\,\frac{\rho^2 + 2\rho\sin\varphi + 1}{\rho^2 - 2\rho\sin\varphi + 1} \text{ (***)}.$$

(*) (Page 177), Exercice IV.

(**) (Page 140).

(***) Les arcs y, z sont supposés *réels*. En outre, on admet les relations entre les fonctions circulaires et les *exponentielles imaginaires*, indiquées ci-dessus (page 178, Exercice V).

IV.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

CHAPITRE XIII.

PRINCIPES SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

Préliminaires.

224. Après la disparition des dénominateurs et des radicaux, toute équation algébrique, à une seule inconnue, peut être réduite à la forme

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m = 0:$$

m est un nombre entier; $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont des coefficients donnés, que nous supposerons réels ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. Ordinairement, on divise tous les termes par le coefficient de x^m, ce qui revient à prendre $A_0 = 1$. Pour abréger, nous représenterons, par $f(x) = 0$, l'équation ainsi simplifiée.

225. Lemme. — *Le reste de la division d'un polynôme entier* f(x), *par un binôme* x — a, *est* f(a).

Si l'on continue la division jusqu'à ce que l'on arrive à un reste R indépendant de x, on aura *identiquement*, en désignant par $\varphi(x)$ le quotient,

$$f(x) = (x - a)\varphi(x) + R.$$

Dans cette *égalité*, remplaçons x par a : le produit $(x - a)\,\varphi(x)$ s'annule, car le facteur $x - a$ devient zéro pour $x = a$, et la quantité $\varphi(a)$ est *finie*. D'ailleurs, le reste R n'a pas changé. Donc

$$f(a) = \mathrm{R}\ (^*).$$

226. Corollaire I. — *Suivant que* a *est ou n'est pas racine de* f(x) = 0, f(x) *est on n'est pas divisible par* x — a.

227. Corollaire II. — *Si* a, b, c, ... g *sont racines de* f(x) = 0, *le polynôme* f(x) *est divisible par le produit des binômes* x — a, x — b, ..., x — g.

D'après le Corollaire I,

$$f(x) = (x - a)\,f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant un polynôme entier. Dans cette égalité, remplaçons x par b; nous aurons

$$0 = (b - a)\,f_1(b).$$

Pour qu'un produit soit nul, il faut qu'un des facteurs soit nul (**204**). Si donc, comme on le suppose, les racines b, a sont différentes l'une de l'autre, on a $f_1(b) = 0$; d'où résulte (**225**)

$$f_1(x) = (x - b)\,f_2(x),$$

puis

$$f(x) = (x - a)(x - b)\,f_2(x).$$

En continuant ainsi, on trouve

$$f(x) = (x - a)(x - b)\ldots(x - g)\,\mathrm{Q},$$

Q étant *un polynôme entier*, ou l'unité.

(*) Cette démonstration, due à D'Alembert, a été l'objet de critiques qui ne nous semblent pas fondées.

228. Théorème de D'Alembert. — *Toute équation algébrique,* f (z) = 0, *dont les coefficients ont la forme*

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

admet au moins une racine de cette forme.

Parmi les nombreuses démonstrations de ce théorème *fondamental,* la plus remarquable est celle qui a été donnée par M. Liouville (*), d'après Mourey (**). Nous allons la reproduire, à quelques modifications près.

Le théorème a été démontré pour l'équation du deuxième degré; par conséquent, il suffit de faire voir que, *s'il est reconnu vrai pour toute équation de degré inférieur à* m, *il subsiste pour toute équation de degré* m.

Cela posé, soit

$$f(z) = z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \cdots + A_{m-1} z + A_m = 0 \quad (1)$$

cette équation. Si nous égalons à zéro l'ensemble des termes qui contiennent z, après les avoir divisés par cette variable, nous formons une équation *auxiliaire*

$$\varphi(z) = z^{m-1} + A_1 z^{m-2} + A_2 z^{m-3} + \cdots + A_{m-1} = 0, \quad (2)$$

laquelle, par hypothèse, *a au moins une racine, de la forme*

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

Soit $a_1 + b_1\sqrt{-1}$ cette racine : le polynôme $\varphi(z)$ est divisible par $z - a_1 - b_1\sqrt{-1}$ (**225**); donc

$$\varphi(z) = \left(z - a_1 - b_1\sqrt{-1}\right)\varphi_1(z),$$

$\varphi_1(z)$ étant un polynôme entier. *L'équation* $\varphi_1(z) = 0$ *a au moins une racine;* ainsi

$$\varphi_1(z) = \left(z - a_2 - b_2\sqrt{-1}\right)\varphi_2(z).$$

(*) *Journal de Mathématiques*, t. IV, p. 501.

(**) *Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires.*

En continuant de la sorte, on voit que le polynôme $\varphi(z)$ est égal au produit des $m-1$ binômes

$$z-a_1-b_1\sqrt{-1},\ z-a_2-b_2\sqrt{-1},\ \ldots,\ z-a_{m-1}-b_{m-1}\sqrt{-1};$$

et que l'équation (1) peut être écrite ainsi :

$$z\left(z-a_1-b_1\sqrt{-1}\right)\left(z-a_2-b_2\sqrt{-1}\right)\ldots$$
$$\left(z-a_{m-1}-b_{m-1}\sqrt{-1}\right)=-A_m. \qquad (3)$$

Il s'agit de savoir s'il existe une valeur de z qui rende identique cette nouvelle équation.

Posons

$$z=x+y\sqrt{-1}=u\left(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega\right),$$

puis

$$x-a_1+(y-b_1)\sqrt{-1}=u_1\left(\cos\omega_1+\sqrt{-1}\sin\omega_1\right),$$
$$x-a_2+(y-b_2)\sqrt{-1}=u_2\left(\cos\omega_2+\sqrt{-1}\sin\omega_2\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x-a_{m-1}+(y-b_{m-1})\sqrt{-1}=u_{m-1}\left(\cos\omega_{m-1}+\sqrt{-1}\sin_{m-1}\right),$$
$$-A=R\left(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha\right):$$

l'équation (3) devient (**217**)

$$uu_1u_2\ldots u_{m-1}\left[\cos(\omega+\omega_1+\omega_{m-1})+\sqrt{-1}\sin(\omega+\omega_1+\cdots+\omega_{m-1})\right]$$
$$=R\left(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha\right);$$

et celle-ci, comme on le voit aisément, se partage en

$$uu_1\ldots u_{m-1}=R, \qquad (4)$$
$$\omega+\omega_1+\cdots+\omega_{m-1}=\alpha\pm 2k\pi. \qquad (5)$$

Regardons x, y comme les coordonnées rectangulaires d'un *point mobile* M, et les quantités

$$a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2;\ \ldots\ a_{m-1},\ b_{m-1}$$

comme les coordonnées de $m-1$ *points fixes* $A_1, A_2, \ldots A_{m-1}$:

les *modules* $u, u_1, \ldots u_{m-1}$ représentent les distances MO, $MA_1, MA_2, \ldots MA_{m-1}$; et les *arguments* $\omega, \omega_1, \ldots \omega_{m-1}$ sont les angles formés, par ces droites, avec la partie positive de l'axe des abscisses.

Occupons-nous d'abord de l'équation (4); et, après avoir donné à ω une valeur particulière quelconque, faisons mouvoir le point M sur la direction OC ainsi choisie : lorsque M se confond avec l'origine, $u=0$, et le produit $uu_1\ldots u_{m-1}$ s'annule; au contraire, quand le mobile s'éloigne indéfiniment de l'origine, ce produit croît au delà de toute limite. D'ailleurs, *les distances* $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ *varient d'une manière continue* (*), en même temps que u; donc: 1° *sur la direction quelconque* OC, *il existe au moins un point* M *dont les coordonnées* $u, u_1, \ldots u_{m-1}$ *vérifient l'équation* (4); 2° *le lieu du point* M *est une courbe* C *qui entoure, de toutes parts, l'origine* O (**).

Considérons maintenant l'équation (5), et faisons mouvoir le point M sur le contour fermé C. Pendant ce mouvement, l'argument ω, et le premier membre de l'équation, augmentent ou diminuent de 2π, pendant que M fait un tour entier, dans un sens ou dans l'autre. Donc ce premier membre, qui varie d'une manière continue, devient, au moins une fois, égal à $\alpha \pm 2k\pi$, k étant un nombre entier quelconque.

De cette discussion il résulte que, dans le plan de la figure, il y a au moins un point M dont les coordonnées polaires vérifient les équations (4), (5), ou dont les coordonnées rectangulaires satisfont à l'équation (3), *transformée* de l'équation (1). Donc cette équation (1) admet au moins une racine. C'est ce qu'il fallait démontrer.

(*) Ce *postulatum* nous paraît incontestable.

(**) Ici, la démonstration n'est pas rigoureuse : M. Liouville l'a complétée. (*Journal de Mathématiques*, t. V, p. 31.)

229. Corollaire. — *Le premier membre d'une équation algébrique, du degré* m, *dans laquelle le coefficient du premier terme est* 1, *est égal au produit de* m *facteurs binômes, de la forme* $x - a$, $x - b$, ..., $x - k$, $(x - l)$.

La démonstration ne diffère pas de celle qui a été donnée ci-dessus (**227**).

230. Théorème II.—*Toute équation algébrique*, f(x)=0, *du degré* m, *admet précisément* m *racines.*

En effet, le produit

$$f(x) = (x - a)(x - b) \dots (x - k)(x - l)$$

s'annule si l'on donne à x une quelconque des valeurs a, b, c,... k, l, et ne s'annule pas si l'on attribue à x toute autre valeur.

231. *Remarque.* — Si quelques-uns des facteurs $x-a$, $x - b$, ..., $x - l$ sont égaux entre eux, on dit que l'équation $f(x)=0$ a des *racines égales* ou des *racines multiples.* Par exemple, l'équation

$$(x - 1)^3 (x + 1)^2 (x - 2)^4 = 0$$

a *trois* racines égales à 1, *deux* racines égales à -1, et *quatre* racines égales à 2.

232. Théorème III.—*Toute équation algébrique, à coefficients réels, qui admet une racine imaginaire* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, *admet aussi la racine conjuguée* $\alpha - \beta\sqrt{-1}$.

Si $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ est racine de l'équation $f(x)=0$, on a, identiquement, $f(\alpha+\beta\sqrt{-1})=0$, ou (**211**) $A+B\beta\sqrt{-1}=0$; d'où résulte, attendu que β *n'est pas nul :* $A=0$, $B=0$.

Mais $f(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = A - B\beta\sqrt{-1} = 0$; donc, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ est racine de l'équation proposée.

233. *Remarque.* — Si $f(x)$ avait des coefficients imaginaires, les fonctions désignées par A, B cessant d'être réelles, l'équation $f(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 0$ ne se décompo-

serait pas en $A=0$, $B=0$; et le théorème *pourrait n'avoir plus lieu* (*).

234. Corollaire.—*Les racines imaginaires d'une équation à coefficients réels sont en nombre pair.*

235. Théorème IV. — *Le premier membre d'une équation algébrique, à coefficients réels, est égal au produit d'autant de facteurs réels du premier degré que l'équation a de racines réelles, et d'autant de facteurs réels du second degré qu'elle admet de couples de racines imaginaires.*

Nous savons que $a, b, c, ..., k, l$ étant les racines de l'équation $f(x)=0$,

$$f(x)=(x-a)(x-b)\dots(x-k)(x-l) \text{ (**)}.$$

Si a, b sont deux racines conjuguées, le produit correspondant prend la forme

$$(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1}),$$

en sorte qu'il se réduit au *trinôme réel* $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$; etc.

Composition des coefficients.

236. Théorème V. — Dans toute équation de la forme

$$x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m=0:$$

le coefficient du deuxième terme est égal à la somme des racines, prise en signe contraire; le coefficient du troi-

(*) On aurait tort d'affirmer qu'une équation à coefficients imaginaires n'a pas de racines conjuguées : l'équation

$$x^3+(2-\sqrt{-1})x^2-2(3-\sqrt{-1})x+2(4-\sqrt{-1})=0$$

est vérifiee par $x=1\pm\sqrt{-1}$.

(**) Le coefficient du premier terme est toujours supposé égal à l'unité. Cette observation est faite une fois pour toutes.

sième terme est égal à la somme de leurs produits deux à deux, etc.; enfin, le dernier terme est égal au produit des racines, ou à ce produit pris en signe contraire, suivant que le degré m *est pair ou impair.*

Les racines étant $a, b, c, \ldots, k, l$, le produit

$$P = (x - a)(x - b) \ldots (x - k)(x - l),$$

ordonné suivant les puissances décroissantes de x, doit être identique avec le premier membre de l'équation. Or, si l'on désigne par S_1 la somme des racines, par S_2 la somme de leurs produits deux à deux, etc., on a (**46**)

$$P = x^m - S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} - S_3 x^{m-3} + \cdots \mp S_{m-1} \pm S_m;$$

et, par suite,

$$A_1 = -S_1, \quad A_2 = S_2; \quad A_3 = -S_3, \ldots, \quad A_m = \pm S_m. \quad (6)$$

227. *Remarque.* — Les relations (6), étant *symétriques* par rapport aux racines, ne peuvent servir à déterminer une de ces racines en particulier. En effet, si l'on en pouvait conclure une équation donnant a, cette équation ne différerait, que par un changement de lettre, de celle qui donnerait b, de celle qui donnerait c, etc. Autrement dit, toutes ces équations seraient, sauf le changement de x en $a, b, c, \ldots$, l'équation proposée. Un calcul très-simple conduit à la même conclusion. Prenons, pour fixer les idées,

$$\begin{aligned} -(a + b + c + d) &= A_1, \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd &= A_2, \\ -(abc + abd + acd + bcd) &= A_3, \\ abcd &= A_4; \end{aligned}$$

puis, afin d'éliminer b, c, d, ajoutons membre à membre

ces égalités, après avoir multiplié, successivement, par a^3, a^2, a : nous trouvons

$$-a^4 = A_1a^3 + A_2a^2 + A_3a + A_4,$$

ou

$$a^4 + A_1a^3 + A_2a^2 + A_3a + A_4 = 0.$$

Continuité des fonctions entières.

228. Problème I. — *Étant donné un polynôme*

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m,$$

trouver une valeur positive de x, *à partir de laquelle le polynôme conserve le signe de son premier terme, et croisse indéfiniment avec* x (en valeur absolue).

Représentons par $f(x)$ ce polynôme; et, pour plus de simplicité, supposons que le coefficient A_0 soit positif : s'il était négatif, on appliquerait à $-f(x)$ la solution suivante.

Cela posé, il peut se présenter deux cas :

1° Si $f(x)$ a tous ses termes positifs, chacun d'eux, à l'exception du dernier, croît indéfiniment avec x, à partir de $x=0$. Cette valeur satisfait donc à la question.

2° Si $f(x)$ a des coefficients négatifs, appelons $-$N le plus grand d'entre eux, et remplaçons tous les coefficients, le premier excepté, par $-$N. Nous aurons, *pour toute valeur positive de* x,

$$f(x) > A_0x^m - N(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1).$$

Par conséquent, dans l'énoncé du problème, nous pouvons remplacer le premier polynôme par le second.

Or, l'inégalité

$$A_0x^m - N(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1) > 0 \qquad (7)$$

équivaut à

$$A_0x^m - N\frac{x^m - 1}{x - 1} > 0;$$

ou encore, à

$$\frac{x^m [A_0(x-1)-N]+N}{x-1} > 0.$$

On satisfait à celle-ci en prenant

$$x \overline{\gtrless} 1 + \frac{N}{A_0}.$$

De plus, en mettant le premier membre de l'inégalité (7) sous la forme

$$x^m \left[A_0 - N\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^m}\right)\right],$$

on voit que, *à partir de* $x = 1 + \frac{N}{A_0}$, *ce premier membre croît indéfiniment avec* x. La quantité $1 + \frac{N}{A_0}$ résout donc le problème proposé.

239. *Remarques.* — I. Pour rendre le résultat de la substitution supérieur à un nombre donné A, il suffit de remplacer $f(x)$ par $f(x) - A$, ou A_m par $A_m - A$. Conséquemment :

Étant donné un polynôme f(x), *on peut toujours assigner une valeur positive de* x *assez grande pour que le résultat de la substitution surpasse, en valeur absolue, un nombre donné quelconque.*

II. *Un polynôme* f(x), *de degré pair, prend le signe du coefficient de son premier terme, quand on attribue à la variable* x *des valeurs suffisamment grandes, positives ou négatives. Mais si le polynôme est de degré impair, il prend le signe du coefficient de son premier terme, ou un signe contraire, suivant que l'on attribue à* x *une très-grande valeur positive ou une très-grande valeur négative.*

240. En indiquant la solution précédente, nous voulions principalement faire voir qu'il est possible de satisfaire, par une valeur positive de x, à l'inégalité $f(x) > 0$. La théorie

des dérivées permet de résoudre le problème d'une manière beaucoup plus satisfaisante. En effet, *une fonction étant croissante quand sa dérivée est positive* (**162**), il s'ensuit que *si l'on peut trouver une valeur* λ *de* x, *qui rende* f(x) *positive, et à partir de laquelle la dérivée* f'(x) *reste positive, la fonction* f(x) *restera positive à partir de* x = λ. De même, pour trouver une valeur de x, à partir de laquelle la première dérivée reste positive, il suffit d'en chercher une à partir de laquelle la deuxième dérivée reste positive. Et ainsi de suite.

En résumé, *si un nombre* λ, *substitué à* x, *rend positives* f(x) *et toutes ses dérivées, cette fonction reste positive à partir de* x = λ.

De plus, *le polynôme* f(x) *croît indéfiniment avec* x, *à partir de cette même valeur* λ.

En effet, remplaçons x par $\lambda + h$, h étant positif; nous aurons

$$f(\lambda + h) = f(\lambda) + \frac{h}{1} f'(\lambda) + \frac{h^2}{1.2} f''(\lambda) + \cdots + A_0 h^m.$$

Or, dans le second membre, tous les coefficients sont positifs : on retombe donc sur un cas déjà examiné (**238**).

Pour trouver λ, on part de $f^{m-1}(x)$, et l'on cherche le plus petit nombre entier qui rende positive cette fonction (*). Si ce nombre, substitué dans $f^{m-1}(x)$, donne un résultat négatif, on l'augmente de 1, 2, 3, ... unités. On continue de la même manière, en remontant jusqu'à $f(x)$. Il est évident que *l'on n'a jamais besoin de revenir sur les essais déjà tentés*.

241. *Application.* — Soit

$$f(x) = 6x^5 + 24x^4 - x^3 + 8x^2 - 16x - 60.$$

(*) On peut même prendre, comme point de départ, la première des dérivées qui présentent une seule *variation de signes*.

La première méthode donne

$$\lambda = \frac{60}{6} + 1 = 11.$$

Pour appliquer la seconde, on forme les polynômes

$$f'(x) = 30x^4 + 96x^3 - 3x^2 + 16x - 16,$$

$$\frac{f''(x)}{1.2} = 60x^3 + 144x^2 - 3x + 8,$$

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3} = 60x^2 + 96x - 1.$$

Ces trois dérivées sont positives pour $x = 1$; mais, si l'on remplace x par 1 dans $f(x)$, on trouve un résultat négatif. Au contraire, $x = 2$ donne $f(x) > 0$. On peut donc prendre $\lambda = 2$.

242. PROBLÈME II. — *Étant donné un polynôme*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + \cdots + A_p x^{m+p},$$

trouver une valeur positive de x *telle, que le résultat de la substitution ait le signe du premier terme, et soit, en valeur absolue, inférieur à un nombre donné* δ.

En posant $x = \frac{1}{z}$, on devra, si A_0 est positif, satisfaire aux inégalités

$$\frac{A_0}{z^m} + \frac{A_1}{z^{m+1}} + \cdots + \frac{A_p}{z^{m+p}} > 0,$$

$$\frac{A_0}{z^m} + \frac{A_1}{z^{m+1}} + \cdots + \frac{A_p}{z^{m+p}} < \delta;$$

ou, puisque z est positif, à ces deux-ci :

$$A_0 z^p + A_1 z^{p-1} + \cdots + A_p > 0, \qquad (8)$$

$$\delta z^{m+p} - (A_0 z^p + A_1 z^{p-1} + \cdots + A_p) > 0. \qquad (9)$$

C'est à quoi l'on parviendra, dans chaque cas particulier, en

appliquant l'une ou l'autre des solutions du premier problème.

243. *Applications.* — I. *Trouver une valeur positive de* x *satisfaisant aux conditions*

$$x^3 + 8x^4 - 7x^5 - 12x^6 + 24x^7 - 150x^8 > 0,$$
$$x^3 + 8x^4 - 7x^5 - 12x^6 + 24x^7 - 150x^8 < 0{,}01.$$

Les inégalités (8), (9) deviennent

$$z^5 + 8z^4 - 7z^3 - 12z^2 + 24z - 150 > 0, \quad (10)$$
$$0{,}01.z^8 - (z^5 + 8z^4 - 7z^3 - 12z^2 + 24z - 150) > 0. \quad (11)$$

On satisfait à la relation (10) par $z \geqq 3$, et à la relation (11), par $z \geqq 6$. Conséquemment, pour résoudre la question proposée, il suffit de prendre $x \leqq \frac{1}{6}$.

II. *Trouver une valeur négative de* x *qui, substituée dans le polynôme*

$$-2x^4 - 7x^5 + 12x^6 + 4x^7 - 24x^8,$$

donne un résultat négatif inférieur, en valeur absolue, à 0,01.

Changeant x en $-x'$, on devra satisfaire, par une valeur *positive* de x', aux inégalités

$$-2x'^4 + 7x'^5 + 12x'^6 - 4x'^7 - 24x'^8 < 0,$$
$$-2x'^4 + 7x'^5 + 12x'^6 - 4x'^7 - 24x'^8 > -0{,}01;$$

ou, ce qui est équivalent, à celles-ci :

$$2x'^4 - 7x'^5 - 12x'^6 + 4x'^7 + 24x'^8 > 0,$$
$$2x'^4 - 7x'^5 - 12x'^6 + 4x'^7 + 24x'^8 > 0{,}01.$$

Remplaçant x' par $\frac{1}{z}$, on a ensuite :

$$2z^4 - 7z^3 - 12z^2 + 4z + 24 > 0,$$
$$0{,}01.z^8 - (2z^4 - 7z^3 - 12z^2 + 4z + 24) > 0.$$

Opérant comme dans l'exemple précédent, on trouve enfin

$$z \gtreqless 5,\quad x' \lesseqgtr \frac{1}{5},\quad x \gtreqless -\frac{1}{5}.$$

244. Théorème VI. — *Toute fonction entière et rationnelle, d'une variable* x, *est continue.*

Soit
$$y = f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m.$$

En premier lieu, à toute valeur *réelle* et *finie* de x, correspond une valeur de y, *réelle*, *finie* et *déterminée*.

D'un autre côté, *on peut toujours attribuer à* x *un accroissement* h *assez petit pour que l'accroissement correspondant* k *de* y *soit, en valeur absolue, inférieur à un nombre donné.*

En effet,
$$k = f'(x)\,h + \frac{f''(x)}{1.2}h^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}h^3 + \cdots + A_0h^m.$$

Or, le second membre est une fonction entière de h, ordonnée suivant les puissances croissantes de cette variable (**242**); donc, etc.

245. *Remarque.* — Lorsque l'accroissement h est suffisamment petit, k prend le signe de $f'(x)$. Ce résultat s'accorde avec celui que l'on conclut de la théorie des dérivées (**162**).

Exercices.

I. Transformer l'équation
$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} = 0,$$
en
$$(A + B + C)^3 = 27ABC.$$

II. Théorème.—*Soit* $f(x, \lambda) = 0$ *une équation du degré* m, *par rapport à* x. *Si, pour* $\lambda = a$, *l'équation a* n *racines réelles, et que, pour* $\lambda = a'$, *elle ait* n' *racines réelles, la somme* n + n' *est un nombre pair.*

III. Théorème. — a, b, c, d, e *désignant les racines de l'équation*

$$x^5 + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x + A_5 = 0,$$

on a, identiquement,

$$\begin{aligned} &a^2(bc + be + de) + b^2(cd + ca + ea) + c^2(de + db + ab) \\ &+ d^2(ea + ec + bc) + e^2(ab + ad + cd) = -2A_4. \end{aligned}$$

(S. Réalis.)

IV. Former une équation du troisième degré, connaissant la somme S_1 des racines, la somme S_2 de leurs carrés et la somme S_3 de leurs cubes.

Application :

$$S_1 = 26, \quad S_2 = 258, \quad S_3 = 2\,834.$$

Résultat :

$$x^3 - 26x^2 + 209x - 520 = 0.$$

V. L'équation

$$(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1 = 0$$

a pour racines, quel que soit le nombre entier n : 0, -1, $-\frac{1}{2}$ (*). Quelle est l'équation qui donne les autres racines?

Résultat :

$$\left.\begin{aligned} &(x+1)^{2n-4} + (x+1)^{2n-5} + (x+1)^{2n-6} + \dots + (x+1) + 1 \\ &+ x\left[(x+1)^{2n-4} - x(x+1)^{2n-5} + \dots - x^{2n-5}(x+1) + x^{2n-4}\right] \\ &\quad - x^{2n-3} + x^{2n-4} - x^{2n-5} + \dots - x + 1 = 0. \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Si, par exemple, $n = 4$, l'équation *réduite* est

$$\begin{aligned} &(x+1)^4 + (x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1 \\ &+ x\left[(x+1)^4 - x(x+1)^3 + x^2(x+1)^2 - x^3(x+1) + x^4\right] \\ &\quad - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0, \end{aligned}$$

(*) On peut démontrer que ces quantités sont *les seules racines réelles* de la proposée.

ou $$4x^4 + 8x^3 + 14x^2 + 10x + 6 = 0;$$

comme on le reconnait par le calcul direct.

VI. Vérifier que, si l'on fait $2x + 1 = y$, l'équation (A) devient

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y^{2n-4} + (C_1 + C_3)\, y^{2n-6} + (C_1 + C_3 + C_5)\, y^{2n-8} + \cdots \\ \quad + (C_1 + C_3 + \cdots + C_{2n-3})\, y^0 = 0. \end{array}\right\} \text{(B)}$$

Dans celle-ci :

$$C_1 = \frac{2n}{1}, \quad C_3 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}, \ldots$$

VII. Soit $f(z) = 0$, une équation algébrique, à coefficients réels. Soit $P + Q\sqrt{-1}$ le résultat de la substitution de $x + y\sqrt{-1}$ à z : les racines de la proposée sont représentées, géométriquement (**228**), par les points où se coupent les lignes ayant pour équations

$$P = 0, \quad Q = 0. \qquad \text{(Prouhet.)}$$

Cela posé, on propose de démontrer qu'en ces *points-racines*, les lignes dont il s'agit sont orthogonales.

VIII. La propriété précédente subsiste pour les lignes représentées par

$$P = a, \quad Q = b,$$

a, b étant deux *paramètres* variables. Ainsi, ces lignes constituent un *système orthogonal*. (Prouhet.)

IX. Dans le polynôme

$$y = x^4 - 22x^3 - 6x^2 + 5x + 3,$$

on remplace x, successivement, par 10 et $10 + h$. Comment doit-on prendre l'accroissement *positif* h pour que l'accroissement k de y soit, en valeur absolue, inférieur à $\frac{1}{100}$?

Réponse : $$h \overline{\lessgtr} \frac{1}{271\,501}.$$

CHAPITRE XIV.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS.—LIMITES DES RACINES.

Transformation des équations.

246. En général, *transformer* f(x) = 0, c'est *chercher une autre équation,* F(y) = 0, *dont les racines aient, avec les racines de la proposée, une relation donnée.* Les questions suivantes éclairciront cette définition.

247. Problème I. — *Multiplier, par un nombre donné* k, *les racines d'une équation*

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m = 0. \quad (1)$$

Ici, la relation donnée est $y = kx$, ou $x = \frac{y}{k}$. Remplaçant x par cette valeur, on trouve

$$A_0y^m + A_1ky^{m-1} + A_2k^2y^{m-2} + \cdots + A_{m-1}k^{m-1}y + A_mk^m = 0. \quad (2)$$

On voit que *les coefficients de la transformée sont égaux à ceux de la proposée, multipliés par les puissances successives de* k.

248. Problème II. — *Transformer une équation, qui a des coefficients fractionnaires, en une autre dont les coefficients soient entiers, et dont le premier terme ait pour coefficient l'unité.*

En chassant les dénominateurs, on mettra la proposée sous la forme (1), les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ étant entiers. Cela étant fait, l'équation (2) sera la transformée cherchée, si l'on peut *disposer du nombre entier* k, *de*

manière à rendre divisibles, par A_0, *les produits* A_1k, A_2k^2, A_3k^3, ..., A_mk^m. C'est à quoi l'on parvient aisément, dans chaque cas particulier.

Soit, par exemple,

$$4x^5 - 25x^4 + 28x^3 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{11}{6} = 0,$$

ou

$$24x^5 - 150x^4 + 168x^3 - 32x^2 + 27x + 11 = 0.$$

Posant $x = \frac{y}{k}$, on obtient

$$y^5 - \frac{25k}{4}y^4 + 7k^2y^3 - \frac{4k^3}{3}y^2 + \frac{9k^4}{8}y + \frac{11k^5}{24} = 0.$$

Les fractions $\frac{25}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{11}{24}$ étant irréductibles, les coefficients seront entiers si les fractions $\frac{k}{4}$, $\frac{k^3}{3}$, $\frac{k^4}{8}$, $\frac{k^5}{24}$ se réduisent à des nombres entiers.

La première condition donne $k = 4k'$, k' étant un nombre entier. La deuxième devient $\frac{64k'^3}{3} =$ *entier*, ou (*) $\frac{k'^3}{3} =$ *entier;* d'où résulte (**) $k' = 3k''$, k'' étant aussi un nombre entier; etc. On trouve enfin que la plus petite valeur admissible de k est 12. Par suite, la transformée demandée est

$$y^5 - 75y^4 + 1\,008y^3 - 2\,304y^2 + 21\,528y + 114\,048 = 0.$$

249. PROBLÈME III. — *Diminuer, d'une quantité donnée* h, *les racines d'une équation* $f(x) = 0$.

Première solution. — De $y = x - h$, on conclut d'abord

$$f(h + y) = 0;$$

(*) *Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs, et qui est premier avec l'un d'eux, divise l'autre.* (B., A., 89.)

(**) *Tout nombre premier, qui divise un produit, divise au moins un des facteurs.* (B., A., 91.)

puis, par le Théorème de Taylor,

$$f(h) + \frac{y}{1}f'(h) + \frac{y^2}{1.2}f''(h) + \cdots + \frac{y^m}{1.2\ldots m}f^m(h) = 0. \quad (3)$$

Telle est la transformée.

Seconde solution. — Divisons $f(x)$ par $x-h$, puis le quotient par $x-h$; et ainsi de suite. Nous aurons

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-h)\,Q_1 + R_1, \\ Q_1 &= (x-h)\,Q_2 + R_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_{m-1} &= (x-h)\,Q_m + R_m : \end{aligned}$$

les restes $R_1, R_2, \ldots, R_m$, et le dernier quotient Q_m (*), sont indépendants de x. Pour éliminer $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m-1}$, multiplions les deux membres de la deuxième équation par $x-h$, les deux membres de la troisième par $(x-h)^2$, etc., puis ajoutons les résultats : il vient

$$f(x) =$$
$$R_1 + R_2(x-h) + R_3(x-h)^2 + \cdots + R_m(x-h)^{m-1} + Q_m(x-h)^m;$$

en sorte que la transformée, dont l'inconnue y égale $x-h$, est

$$R_1 + R_2 y + R_3 y^2 + \cdots + R_m y^{m-1} + Q_m y^m = 0. \quad (4)$$

250. *Remarques.* — I. En comparant les développements (3), (4), on trouve, à cause de $\frac{f^m(h)}{1.2.3\ldots m} = A_0 = Q_m$:

$$f(h) = R_1,\ \frac{f'(h)}{1} = R_2,\ \frac{f''(h)}{1.2} = R_3, \ldots,\ \frac{f^{(m-1)}(h)}{1.2.3\ldots(m-1)} = R_m.$$

II. Le calcul des restes $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_m$ est très-rapide,

(*) Ce dernier quotient est égal au coefficient A_0 du premier terme de $f(x)$.

au moins quand la quantité h est entière, si l'on emploie un procédé bien connu, mais que nous croyons cependant devoir rappeler ici.

Soit à diviser

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m$$

par le binôme x — a; *soient*

$$B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} + \cdots + B_{m-2}x + B_{m-1}$$

le quotient et R *le reste.*

En multipliant le quotient par $x - a$, ajoutant R au produit, puis *identifiant* avec le dividende, on trouve

$$B_0 = A_0,\quad B_1 = B_0a + A_1,\quad B_2 = B_1a + A_2,\ \ldots,$$
$$B_{m-1} = B_{m-2}a + A_{m-1},\quad R = B_{m-1}a + A_m.$$

Ces formules démontrent la règle suivante :

Pour obtenir le coefficient d'un terme quelconque du quotient (B_0 excepté), *on multiplie par* a *le coefficient précédent, et l'on ajoute, au produit, le coefficient du dividende, de même rang que le coefficient cherché.*

III. Si la quantité h est fractionnaire, et égale à $\frac{p}{q}$, on pose

$$y = x - \frac{p}{q},\quad x' = qx,\qquad x'' = qy;$$

d'où

$$x = \frac{x'}{q},\qquad x' = x'' + p,\ x'' = qy. \tag{5}$$

Ainsi : 1° *on multiplie par* q *les racines de la proposée;* 2° *on diminue de* p *les racines de la première transformée;* 3° *on divise par* q *les racines de la deuxième transformée.*

251. *Applications.*

I. $\quad 2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 5x - 1 = 0,\quad h = 3.$

Les divisions successives donnent

2	-1	-11	-28	$-85 = R_1$,
2	3	4		$-16 = R_2$,
2	11			$+37 = R_3$,
2				$+17 = R_4$.

La transformée est

$$2y^4 + 17y^3 + 37y^2 - 16y - 85 = 0.$$

II. $x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0, \quad h = -\frac{2}{3}.$

Comparant avec les formules (5), on a

$$x = \frac{x'}{3}, \quad x' = x'' - 2, \quad x'' = 3y.$$

La première transformée est (247)

$$x'^4 + 24x'^3 - 18x'^2 + 162x' - 324 = 0.$$

On obtient la deuxième par les divisions suivantes, dans lesquelles le diviseur est $x' + 2$:

1	$+22$	-62	$+286$	$-896 = R_1$,
1	$+20$	-102		$+490 = R_2$,
1	$+18$			$-138 = R_3$,
1				$+16 = R_4$.

Elle est donc

$$x''^4 + 16x''^3 - 138x''^2 + 490x'' - 896 = 0.$$

Enfin, $x'' = 3y$ donne

$$81y^4 + 432y^3 - 1\,242y^2 + 1\,470y - 896 = 0.$$

252. Problème IV.—*Faire disparaître le deuxième terme d'une équation* $f(x) = 0$, c'est-à-dire *transformer cette équation en une autre dont la somme des racines soit nulle.*

Posant $y = x - h$, et désignant par $a, b, c, \ldots$ les racines de la proposée, on doit avoir

$$(a-h)+(b-h)+(c-h)+\cdots=0,$$

ou (226)

$$-A_1 - mh = 0.$$

On tire, de cette équation,

$$h = -\frac{A_1}{m}.$$

Par suite

$$y = x + \frac{A_1}{m}.$$

Ainsi, *pour faire disparaître le deuxième terme d'une équation, on augmente les racines d'une quantité égale au coefficient de ce deuxième terme, divisé par le degré de l'équation* (*).

Limites des racines.

253. On appelle *limites des racines* deux quantités entre lesquelles sont comprises toutes les racines réelles d'une équation $f(x) = 0$.

254. *Remarques.*— I. Ordinairement, ces quantités sont de signes contraires; mais, si l'équation n'a pas de racines négatives, zéro est une limite *inférieure*. De même, si l'équation n'avait pas de racines positives, zéro serait une limite *supérieure*.

II. Dans le cas général, si $(-l')$ est une limite inférieure, $(+l')$ sera une limite supérieure des racines de la transformée en $(-x)$. Par conséquent, la question peut

(*) On arrive au même résultat en remplaçant x par $y+h$ dans les deux premiers termes de la proposée, et en développant suivant les puissances décroissantes de y. Ce second procédé peut servir à *faire disparaître un terme de rang quelconque*.

être réduite à la *recherche d'une limite supérieure des racines.*

III. l étant une limite supérieure des racines, toute quantité plus grande est également une limite supérieure (*).

IV. Si le polynôme $f(x)$ reste positif à partir de $x = \lambda$, la quantité λ est une limite supérieure des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Cette dernière remarque sert de base aux méthodes suivantes :

255. Ire MÉTHODE. — *On obtient une limite supérieure des racines en ajoutant l'unité au plus grand coefficient négatif, pris positivement* (**).

Représentons, comme dans le n° **228**, par (— N) le plus grand coefficient négatif de l'équation $f(x) = 0$, et faisons croître x indéfiniment, à partir de $1 + N$: le polynôme $f(x)$, positif pour cette valeur de x, croîtra indéfiniment (**228**). Donc, etc.

256. IIe MÉTHODE.— *On obtient une limite supérieure des racines en extrayant, du plus grand coefficient négatif pris positivement, une racine dont l'indice égale l'excès du degré de l'équation sur le degré du premier terme négatif, et en ajoutant l'unité à cette racine.*

Soit

$$f(x) = x^m + Bx^{m-1} + \cdots - Px^{m-p} + \cdots - Nx^{m-n} + \cdots + U;$$

$- Px^{m-p}$ étant le premier terme négatif, et $-N$ le plus grand coefficient négatif. Des raisonnements et des calculs analogues à ceux dont nous avons déjà fait usage (**228**) donnent, successivement,

$$f(x) > x^m - N(x^{m-p} + x^{m-p-1} + \cdots + x + 1),$$

(*) On ne doit donc pas dire : LA *limite supérieure des racines*, mais bien : UNE *limite supérieure des racines.*

(**) Il est sous-entendu ici, comme dans le Problème IV, que le premier terme de l'équation a pour coefficient l'unité.

$$x^m - N\frac{x^{m-p+1}-1}{x-1} > 0,$$

$$\frac{x^{m-p+1}\left[(x-1)x^p - N\right] + N}{x-1} > 0,$$

$$(x-1)^p - N > 0,$$

$$x = \lambda = 1 + \sqrt[p]{N}.$$

257. IIIe MÉTHODE. — ***On obtient une limite supérieure des racines en décomposant le premier membre de l'équation en plusieurs polynômes présentant, chacun, au plus une variation (*), et en cherchant un nombre λ qui les rende tous positifs.***

Remarquons d'abord que *si un polynôme* $\varphi(x)$, *présentant une seule variation, est positif pour une valeur positive de* x, *il reste positif à partir de cette valeur.*

Soit, pour fixer les idées,

$$\varphi(x) = x^7 + 2x^5 - 3x^4 - 8x - 13.$$

L'inégalité $\varphi(x) > 0$, vérifiée pour $x = 2$, peut être écrite ainsi :

$$x^5\left[x^2 + 2 - \frac{3}{x} - \frac{8}{x^4} - \frac{13}{x^5}\right] > 0.$$

Si, dans la parenthèse, on fait croître x à partir de 2 (**), la partie positive augmente et la partie négative diminue; donc le polynôme $\varphi(x)$ est positif pour $x > 2$ (***).

(*) Lorsqu'un polynôme, ordonné suivant les puissances décroissantes d'une variable x, a ses coefficients réels, on appelle *variation* la succession de deux termes de signes contraires, et *permanence*, la succession de deux termes de même signe. Par exemple,

$$x^9 + x^6 + 2x^4 - 7x^2 - 3x + 1$$

présente *deux* variations et *trois* permanences.

(**) Et même à partir de 1.

(***) Cette démonstration, dont nous avons déjà fait usage (228), prouve

Soient maintenant $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... les polynômes, de même forme que $\varphi(x)$, dans lesquels on a décomposé $f(x)$ (*) ; soient λ_1, λ_2, ... des nombres, au moins égaux à 1, et tels que l'on ait

$$\varphi_1(\lambda_1) > 0, \quad \varphi_2(\lambda_2) > 0, \ldots$$

Si λ est le plus grand de ces nombre, le polynôme $f(x)$ reste donc positif à partir de $x = \lambda$.

258. *Remarque.* — Quelquefois, la décomposition du premier membre peut être effectuée de plusieurs manières, et alors on obtient différentes valeurs de λ. Il est évident que l'on doit toujours choisir la plus petite.

Si, par exemple,

$$f(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x - 10\,000,$$

et que l'on prenne

$$\varphi_1(x) = x^5 + x^4 - x^3, \quad \varphi_2(x) = x - 10\,000,$$

on trouve $\lambda = 10\,000$. Mais, en groupant les termes ainsi :

$$(x^5 + x^4 - x^3 - 10\,000) + x,$$

on a $\lambda = 7$.

259. IV° MÉTHODE (méthode de Newton). — *On obtient une limite supérieure des racines en cherchant un nombre λ qui rende positives* f(x) *et ses dérivées.*

En effet, le polynôme $f(x)$ reste positif à partir de $x = \lambda$ (**240**).

que *toute équation dont le premier membre présente une seule variation, n'a pas plus d'une racine supérieure à l'unité.* On verra, dans le chapitre suivant, un théorème plus précis.

(*) On peut, évidemment, faire abstraction de ceux qui seraient composés de termes positifs.

260. *Application des méthodes précédentes.* — Soit

$$f(x) = 6x^5 + 24x^4 - x^3 + 8x^2 - 16x - 60.$$

La première méthode conduit à

$$\lambda = \frac{60}{6} + 1 = 11.$$

La deuxième donne

$$\lambda = 1 + \sqrt{10} = 5.$$

La troisième :

$$\lambda = 4, \quad \lambda = 2,$$

suivant que l'on décompose $f(x)$ en

$$(6x^5 + 24x^4 - x^3) + (8x^2 - 16x - 60),$$

ou en

$$(6x^5 + 24x^4 - x^3 - 60) + 8x^2 - 16x.$$

Pour appliquer la dernière méthode, formons les polynômes

$$f'(x) = 30x^4 + 96x^3 - 3x^2 + 16x - 16,$$

$$\frac{f''(x)}{1.2} = 60x^3 + 144x^2 - 3x + 8,$$

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3} = 60x^2 + 96x - 1.$$

Ces trois dérivées sont positives pour $x = 1$; mais, si l'on remplace x par 1 dans $f(x)$, le résultat est négatif. On doit donc prendre $\lambda = 2$.

Si l'on change x en $-x$, on trouve, pour limite supérieure des racines de la transformée, $\lambda' = 4$. Donc toutes les racines de l'équation proposée sont comprises entre -4 et $+2$.

Exercices.

I. Transformer l'équation

$$8x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 24x^2 - 7x - 11 = 0,$$

en une autre qui soit privée du deuxième terme, et dans laquelle les coefficients soient entiers, le coefficient du premier terme étant l'unité.

Résultat :

$$y^5 + 14y^3 + 1\,588y^2 - 455y - 47\,084 = 0.$$

II. Transformer une équation dont les racines sont comprises entre l et l', en une autre dont les racines soient comprises entre λ et λ'.

III. On obtient une limite supérieure des racines en divisant chaque coefficient négatif, pris positivement, par la somme des coefficients positifs qui le précèdent, et en ajoutant l'unité à la plus grande des fractions ainsi obtenues. (Règle de Bret.)

IV. On a une limite supérieure des racines de l'équation

$$x^m \ldots - Px^{m-p} \ldots - Qx^{m-q} \ldots - R^{m-r} \ldots = 0,$$

en ajoutant les deux plus grandes des quantités $\sqrt[p]{P}$, $\sqrt[q]{Q}$, $\sqrt[r]{R}$, ... (Règle de Lagrange.)

V. Pour obtenir une limite supérieure des racines, on peut diviser le plus grand coefficient négatif, pris positivement, par le plus grand des coefficients qui précèdent le premier coefficient négatif; extraire, du quotient, une racine dont l'indice égale l'excès du degré du terme dont le coefficient a servi de diviseur, sur le degré du premier terme négatif; et ajouter l'unité à cette racine. (Règle de Tillot.)

CHAPITRE XV.

EXISTENCE DES RACINES RÉELLES.

Préliminaires.

261. Lemme. — *Si deux quantités* α, β, *substituées à* x *dans* f(x), *donnent des résultats de signes contraires, l'équation* f(x) = 0 *a au moins une racine réelle, comprise entre* α *et* β.

Soit, pour fixer les idées, $\alpha < \beta$. Si l'on imagine que x varie d'une manière continue, depuis α jusqu'à β, $f(x)$ variera aussi d'une manière continue (**244**). Or, cette fonction était négative pour $x = \alpha$ et positive pour $x = \beta$, ou inversement ; donc elle a dû, au moins une fois, passer par zéro (*).

262. *Remarque.* — La démonstration précédente repose

(*) On peut modifier un peu la démonstration, de manière à la rendre encore plus évidente. Supposons $\beta > \alpha > 0$: on ramène aisément les autres cas à celui-là. Supposons en outre, pour fixer les idées, $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$. Enfin, soient P l'ensemble des termes positifs, — N l'ensemble des termes négatifs de $f(x)$, de manière que $f(x) = P - N$. Si l'on fait croître x d'une manière continue, depuis α jusqu'à β, les polynômes P, N, dont tous les termes sont positifs, *croîtront* d'une manière continue. Or, pour $x = \alpha$, P était moindre que N ; et, pour $x = \beta$, P est devenu plus grand que N. Donc, pour une ou plusieurs valeurs de x, comprises entre α et β, on a eu $P = N$, ou $f(x) = 0$. Après avoir fait ce raisonnement, Lagrange ajoute : « Comme deux mobiles qu'on suppose parcourir une même ligne dans le même sens, et qui, partant à la fois de deux points différents, arrivent en même temps à deux autres points, mais de manière que celui qui était d'abord en arrière se trouve ensuite plus avancé que l'autre, doivent nécessairement se rencontrer dans leur chemin. »

uniquement sur la continuité de la fonction considérée. Par conséquent, la proposition subsiste pour toute équation $f(x) = 0$, algébrique ou *transcendante,* dont le premier membre reste continu, quand x varie entre α et β.

263. THÉORÈME I. — *Si deux quantités* α, β *comprennent entre elles un nombre impair de racines de l'équation* $f(x) = 0$, *ces quantités, substituées à* x *dans* $f(x)$, *donnent des résultats de signes contraires.*

Soient $a, b, c, \ldots, g$ les racines comprises entre α et β; soit $\varphi(x)$ le produit des facteurs du premier degré, correspondant aux autres racines (**229**) ; on aura

$$f(x) = (x - a)(x - b) \ldots (x - g)\,\varphi(x);$$

puis

$$f(\alpha) = (\alpha - a)(\alpha - b) \ldots (\alpha - g)\,\varphi(\alpha),$$

$$f(\beta) = (\beta - a)(\beta - b) \ldots (\beta - g)\,\varphi(\beta).$$

Les quantités $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ ont même signe, sans quoi l'équation $\varphi(x) = 0$ aurait au moins une racine comprise entre α et β (**261**), et $a, b, c, \ldots, g$ ne seraient pas les seules racines de $f(x) = 0$, comprises entre ces mêmes limites. D'un autre côté, les deux produits

$$(\alpha - a)(\alpha - b) \ldots (\alpha - g),$$

$$(\beta - a)(\beta - b) \ldots (\beta - g),$$

composés chacun d'un nombre impair de facteurs, sont de signes contraires; car les facteurs du premier produit sont positifs, et les autres sont négatifs. Donc, etc.

264. THÉORÈME II. — *Si deux quantités* α, β *comprennent entre elles un nombre pair de racines de l'équation* $f(x) = 0$, *ou n'en comprennent aucune, ces quantités, substituées à* x *dans* $f(x)$, *donnent des résultats de même signe.*

La démonstration est semblable à celle qui précède.

265. Théorème III (réciproque des deux premiers). — 1° *Si deux quantités* α, β, *substituées à* x *dans* f(x), *donnent des résultats de signes contraires, ces quantités comprennent entre elles un nombre impair de racines de l'équation* $f(x) = 0$;

2° *Si deux quantités* α, β, *substituées à* x *dans* f(x), *donnent des résultats de même signe, ces quantités comprennent entre elles un nombre pair de racines de l'équation* $f(x) = 0$, *ou elles n'en comprennent aucune.*

266. Théorème IV. — *Toute équation algébrique, de degré impair, a au moins une racine réelle, de signe contraire à son dernier terme.*

Soit d'abord l'équation

$$f(x) = x^m + Bx^{m-1} + \cdots + Sx - T = 0,$$

dans laquelle le dernier terme est *négatif.*

Si l'on donne à x la valeur *zéro* et une valeur positive λ suffisamment grande, le résultat de la substitution, d'abord égal à $-T$, devient ensuite positif (**228**). Donc l'équation a au moins une racine comprise entre 0 et λ.

La démonstration s'applique au cas où le dernier terme est positif.

267. Théorème V. — *Toute équation algébrique, de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.*

Même démonstration que pour le théorème précédent.

268. *Remarque.* — *Une équation de degré pair, dont le dernier terme est positif, peut avoir toutes ses racines imaginaires.* Exemple : $x^4 + 1 = 0$.

Théorème de Descartes.

269. Lemme. — *Quand on multiplie un polynôme entier, ordonné suivant les puissances décroissantes d'une lettre* x,

par un binôme* x — a, a *étant une quantité positive, le produit présente au moins une variation de plus que le multiplicande.

Supposons que le premier terme du polynôme soit x^m. Ce terme x^m commence un groupe de termes *positifs*, lequel est suivi d'un groupe de termes *négatifs*; celui-ci, à son tour, est suivi d'un groupe de termes *positifs*, etc. Enfin, le polynôme se termine par un groupe de termes tous positifs ou tous négatifs. Chacun de ces groupes peut, dans certains cas, être remplacé par un terme unique.

Cela posé, la multiplication dont il s'agit peut être indiquée comme on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{llllll}
x^m \ldots\ldots & -\mathrm{P} \ldots & +\mathrm{Q} \ldots & -\mathrm{R} \ldots & \pm\mathrm{S} \ldots & \pm\mathrm{T} \\
 & & & x - a & & \\
\hline
x^{m+1} \ldots & -\mathrm{P}' \ldots & +\mathrm{Q}' \ldots & -\mathrm{R}' \ldots & \pm\mathrm{S}' \ldots & \pm\mathrm{T}' \\
\ldots\ldots\ldots & -\mathrm{P}'' \ldots & +\mathrm{Q}'' \ldots & -\mathrm{R}'' \ldots & \pm\mathrm{S}'' \ldots\ldots & \mp\mathrm{T}a \\
\hline
x^{m+1} \ldots & -\mathrm{P}''' \ldots & +\mathrm{Q}''' \ldots & -\mathrm{R}''' \ldots & \pm\mathrm{S}''' \ldots\ldots & \mp\mathrm{T}a.
\end{array}$$

1° Dans le multiplicande, la première série de termes *négatifs* commence par — P; la deuxième série de termes *positifs* commence par + Q, etc. Une dernière série de termes, tous de même signe, commence par ± S et se termine par ± T : ce dernier terme est supposé indépendant de x.

2° La multiplication par x donne des produits partiels, de même signe que les multiplicandes correspondants. Parmi ces produits partiels, ceux qui proviennent de — P, + Q, ..., ± S, ± T, sont désignés par — P′, + Q′, ..., ± S′, ± T′.

3° La quantité a étant supposée positive, la multiplication par — a donne des produits partiels, de signes contraires aux multiplicandes. D'ailleurs, les degrés de ces produits sont respectivement inférieurs, d'une unité, aux

degrés des premiers produits. Par conséquent, *si le terme qui devrait précéder immédiatement* (— P) *ne manque pas*, ce terme, multiplié par — a, donne un produit *négatif* (— P″), de même degré que (— P′). Et *si ce terme manque*, (— P″) est remplacé par zéro. Semblablement, les termes qui devraient précéder (+ Q), (— R), ..., (± S), donnent des produits (+ Q″), (— R″), ..., (± S″), des mêmes degrés que (+ Q′), (— R′), ..., (± S′) : ces produits peuvent d'ailleurs, dans le cas d'un multiplicande *incomplet*, être remplacés par zéro.

4° Il résulte, de cette discussion, que les termes du produit, désignés par (— P‴), (+ Q‴), (— R‴), ..., (± S‴), ont les signes des termes (— P), (+ Q), (— R), ..., (± S), qui leur correspondent dans le multiplicande. Quant aux derniers termes de ces deux polynômes, ils ont évidemment des signes contraires.

5° Comparons actuellement le multiplicande et le produit : de x^m à (— P), il y a *une seule* variation, et il y en a *au moins une* de x^{m+1} à (— P‴); de (— P) à (+ Q), il y a *une seule* variation, et il y en a *au moins une* de (— P‴) à (+ Q‴), etc. Enfin, de (± S) à (± T), il n'y a *pas de variation*, et il y en a *au moins une* de (± S‴) à (∓ Ta).

6° Le produit présente donc au moins une variation de plus que le multiplicande (*).

270. *Remarque. — L'excès du nombre des variations du produit, sur le nombre des variations du multiplicande, est un nombre impair.*

1° Si le dernier terme du multiplicande est + T, le dernier terme du produit est (— Ta); mais alors le premier

(*) La démonstration suppose que le groupe qui termine le multiplicande contient au moins *deux* termes : si ce groupe était remplacé par un seul terme, on ferait T = 0, et le produit serait terminé par ± S‴ ∓ Sa. Les conclusions précédentes subsistent donc dans ce cas particulier.

polynôme a un nombre *pair* de variations, et le second en a un nombre *impair* : la différence entre ces deux nombres, c'est-à-dire l'*excès* du second sur le premier, est donc un nombre *impair*.

2° Même démonstration dans le cas où le multiplicande se termine par $(-T)$.

271. Théorème de Descartes. — *Dans toute équation complète ou incomplète, le nombre des racines positives ne surpasse pas le nombre des variations.*

Soient $a, b, c, \ldots, g$ les racines positives d'une équation $f(x) = 0$. Représentons par $\varphi(x)$ *le produit des facteurs correspondant aux racines négatives et aux racines imaginaires* : nous aurons

$$f(x) = \varphi(x)(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-g).$$

D'après le lemme précédent, la multiplication par les facteurs successifs $x-a$, $x-b$, ..., $x-g$ doit introduire, à chaque fois, au moins une variation : par conséquent, lors même que $\varphi(x)$ aurait tous ses termes positifs, *le nombre des variations de* f(x) *serait au moins égal au nombre des racines positives* a, b, c, ..., g. C'est ce qu'il fallait démontrer.

272. Corollaire I. — *Toute équation dont le premier membre présente une seule variation, a une seule racine positive.*

En effet, l'équation a au moins une telle racine (266, 267); et n'en a pas plus d'une (*).

273. Corollaire II. — *Si le nombre des variations surpasse le nombre des racines positives, l'excès est un nombre pair.*

Reprenons l'égalité

$$f(x) = \varphi(x)(x-a)(x-b)\ldots(x-g),$$

(*) Voyez la troisième note de la page 208.

et représentons par p le nombre des racines positives a, b, c, ..., g.

Le polynôme $\varphi(x)$ se termine par un terme positif; car l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a aucune racine positive; donc ce polynôme présente un nombre pair de variations. De plus, la multiplication par $x - a$, par $x - b$,... introduit, à chaque fois, un nombre impair de variations (**270**). Le nombre v des variations de $f(x)$ se compose donc d'*un nombre pair, augmenté de* p *nombres impairs*. Autrement dit,

$$v - p = \textit{nombre pair} + \text{p } \textit{nombres pairs} = \textit{nombre pair}.$$

274. Corollaire III. — *Le nombre des racines négatives d'une équation* $f(x) = 0$ *ne surpasse pas le nombre des variations de la transformée en* $(-x)$ (*).

On appelle *transformée en* $(-x)$, l'équation que l'on obtient en changeant x en $(-x)$ dans la proposée. Or, les racines positives de la transformée étant, abstraction faite du signe, égales aux racines négatives de la proposée, le nombre des variations que présente $f(-x)$ ne peut surpasser le nombre de ces dernières racines.

275. Corollaire IV. — *Quand une équation* $f(x) = 0$ *a toutes ses racines réelles, le nombre* p *des racines positives est égal au nombre* v *des variations, et le nombre* n *des racines négatives est égal au nombre* v' *des variations de la transformée en* $(-x)$.

On peut d'abord observer que la somme $v + v'$ de ces deux nombres de variations ne surpasse pas le degré m de l'équation. En effet, si l'équation est complète, c'est-à-dire si $f(x)$ renferme $m + 1$ termes, la somme du nombre des *variations* et du nombre des *permanences* de $f(x)$ est égale à m; mais, quand on change x en $(-x)$, *les varia-*

(*) Cette proposition complète le Théorème de Descartes.

tions deviennent des permanences, et réciproquement (*) : donc, dans ce cas, $v+v'=m$. D'un autre côté, si l'on supprime quelques termes de $f(x)$, les nombres v, v' pourront bien diminuer, mais ils n'augmenteront pas : donc, en général,

$$v+v' \overline{\gtrless} m. \qquad (1)$$

Supposons actuellement que toutes les racines soient réelles, auquel cas

$$p+n=m. \qquad (2)$$

La comparaison des relations (1) et (2) donne

$$v+v' \overline{\gtrless} p+n. \qquad (3)$$

Or, p ne surpasse pas v, n ne surpasse pas v'; donc

$$p=v, \quad n=v'.$$

En outre,

$$v+v'=m.$$

276. Corollaire V. — *Si la multiplication de* f(x) *par* x — a *introduit* 2k + 1 *variations,* f(x) = 0 *a, au moins,* 2k *racines imaginaires.* (Sturm.)

Soient $2i$ le nombre de ces racines, et v le nombre des variations de $f(x)$. On a, en conservant les notations précédentes,

$$p=m-n-2i \overline{\gtrless} v;$$

donc

$$n \overline{\gtrless} m-v-2i. \qquad (1)$$

$(x-a)f(x)$ ayant, par hypothèse, $v+2k+1$ variations, la transformée en $-x$ en a, tout au plus, $m+1-(v+2k+1)$. Ainsi

$$n \overline{\gtrless} m-v-2k. \qquad (2)$$

(*) En effet, de deux termes consécutifs, un seul change de signe : c'est celui qui contient une puissance impaire de x.

Conséquemment,

$$m - v - 2k \geqq m - v - 2i,$$

ou

$$2i \geqq 2k.$$

277. *Remarques.* — I. Le Théorème de Descartes, appliqué à une équation *incomplète*, indique presque toujours l'existence d'un certain nombre de racines imaginaires (*). Soit, par exemple,

$$f(x) = x^9 + x^6 + 2x^4 - x + 1 = 0.$$

D'après le nombre des variations de $f(x)$ et de $f(-x)$, on trouve que cette équation a, au plus, deux racines positives et une racine négative : elle a donc, *au moins*, six racines imaginaires.

II. En particulier, *s'il manque un terme entre deux termes de même signe, l'équation a, au moins, deux racines imaginaires.*

Prenons

$$f(x) = x^m + \cdots \pm Gx^q \pm Hx^{q-2} + \cdots + T.$$

Quel que soit le signe de x, il n'y a aucune variation entre $\pm Gx^q$ et $\pm Hx^{q-2}$. Conséquemment, en employant les relations précédentes :

$$v + v' \leqq (m - q) + q - 2,$$

ou

$$v + v' \leqq m - 2;$$

et, à plus forte raison,

$$p + n \leqq m - 2.$$

(*) Cependant une équation *incomplète* peut avoir toutes ses racines réelles : l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$ a pour racines $+1, +2, -3$.

III. Ce n'est pas tout : *Si, en multipliant* f(x) *par un binôme convenablement choisi, on peut faire disparaître un certain nombre de termes, l'équation* f(x) = 0 *a des racines imaginaires.*

Soit, par exemple, l'équation

$$x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} - x^{6} - x^{5} - x^{4} + x^{2} + x + 1 = 0.$$

L'application du Théorème de Descartes et du Corollaire III donne seulement

$$p \overline{\overline{<}} 2, \quad n \overline{\overline{<}} 9.$$

Mais, si l'on multiplie le premier membre par $x - 1$, l'équation devient

$$x^{14} - x^{10} - (x^{7} - x^{4}) + x^{3} - 1 = 0,$$

ou

$$x^{14} - x^{10} - x^{7} + x^{4} + x^{3} - 1 = 0;$$

et, par le changement de x en $-x$:

$$x^{14} - x^{10} + x^{7} + x^{4} - x^{3} - 1 = 0.$$

Ainsi,

$$n \overline{\overline{<}} 3.$$

La proposée a donc, au moins, *huit racines imaginaires.*

Autres théorèmes.

278. THÉORÈME DE ROLLE (*). — *Deux racines consécutives d'une équation algébrique comprennent entre elles un nombre impair de racines de l'équation dérivée.*

Soient a, b deux racines consécutives de l'équation $f(x) = 0$; et, pour fixer les idées, supposons $a < b$. Si x

(*) Michel Rolle, membre de l'Académie des sciences, mort au commencement du dix-huitième siècle.

varie entre a et b, $f(x)$ conserve le même signe dans l'intervalle : admettons que ce soit le signe $+$. Pour $x = a$, la fonction $f(x)$ est *croissante* (**202**); donc la dérivée est *positive*. Au contraire, $f(x)$ est *décroissante* pour $x = b$; et la dérivée est *négative* (*). D'après le Théorème III (**265**), les quantités a, b comprennent donc entre elles un nombre impair de racines de l'équation $f'(x) = 0$.

279. Corollaire I. — *Entre deux racines consécutives de* $f'(x) = 0$, *il ne peut y avoir plus d'une racine de* $f(x) = 0$.

Soient a_1, b_1 ces deux racines consécutives. Si l'on pouvait avoir

$$a_1 < a < b < b_1,$$

il n'y aurait, entre a et b, aucune racine de l'équation $f'(x) = 0$; contrairement au théorème.

280. Corollaire II. — *Les racines réelles de l'équation dérivée séparent les racines réelles de l'équation primitive.*

En effet, si a_1, b_1, c_1, ... sont les racines réelles de $f'(x) = 0$, rangées par ordre de grandeur, il ne peut y avoir, entre a_1 et b_1, plus d'une racine de $f(x) = 0$. De même pour b_1 et c_1; etc. (**).

281. Corollaire III. — *Si l'équation* $f(x) = 0$ *a toutes ses racines réelles et inégales, chacune des équations* $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, ... *a aussi toutes ses racines réelles et inégales.*

282. Théorème de De Gua (***). — *Quand une équation a toutes ses racines réelles, le carré d'un coefficient quelconque surpasse le produit des deux coefficients voisins.*

(*) Ces propositions, évidentes à l'inspection de la courbe représentée par $y = f(x)$, supposent que a, b sont des racines *simples*.

(**) C'est sur cette remarque, bien simple, que Rolle avait établi la *Méthode des cascades*.

(***) *Académie des sciences*, 1741.

Considérons quatre termes consécutifs de l'équation $f(x)=0$:

$$\ldots\ldots + Ex^{p+1} + Fx^p + Gx^{p-1} + Hx^{p-2} + \cdots;$$

multiplions ce quadrinôme par $x-h$; puis disposons de h de manière à faire disparaître, du produit, le terme en x^p : l'équation proposée ayant toutes ses racines réelles, les coefficients de x^{p+1} et de x^{p-1} devront avoir des signes contraires (277, II). On obtient, à cause de $h=\frac{G}{F}$,

$$\cdot\ldots\ldots + \frac{F^2-EG}{F}x^{p+1} + \frac{FH-G^2}{F}x^{p-1} + \cdots$$

Ainsi déjà, *les binômes*

$$F^2-EG,\quad G^2-FH,\ldots$$

ont même signe.

Pour déterminer ce signe commun, il suffit d'appliquer le calcul précédent au trinôme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2},$$

en faisant $h=\frac{B}{A}$: on trouve $C-\frac{B^2}{A}<0$. On a enfin, puisque A est positif :

$$B^2>AC,\quad C^2>BD,\quad D^2>CE,\ldots$$

283. Corollaire. — *Si les coefficients ne satisfont pas tous à la condition énoncée, l'équation a des racines imaginaires.*

284. *Remarque.* — La réciproque du théorème de De Gua n'est pas exacte : l'équation

$$x^7+x^6-x^5-x^4+x^3+x^2-x-1=0,$$

qui satisfait à toutes les conditions énoncées, a des racines imaginaires. En effet, le premier égale $(x+1)^2(x-1)(x^4+1)$.

Exercices.

I. Théorème. — *Si trois termes consécutifs sont en progression par quotient, l'équation a des racines imaginaires.*

II. Théorème. — *Si les coefficients de quatre termes consécutifs sont en progression par différence, l'équation a des racines imaginaires.* (Hermite.)

III. Théorème de Fourier (*). — *Soient* $X = 0$ *une équation donnée, et* X', X'', ..., $X^{(m)}$ *les dérivées successives du premier membre : la différence entre le nombre des variations de la suite* $X, X', X'', ..., X^{(m)}$, *pour* $x = \alpha$, *et le nombre des variations de la même suite pour* $x = \beta$, *n'est pas moindre que le nombre des racines réelles de l'équation, comprises entre* α *et* β.

IV. Théorème. — *Si l'équation* $f(x) = 0$ *a toutes ses racines réelles et inégales, l'équation obtenue en égalant à zéro la seconde dérivée de* $\frac{1}{f(x)}$, *a toutes ses racines imaginaires.*

V. Théorème. — *L'équation*

$$x^m + \left(\frac{m}{1}\right)^2 x^{m-1} + \left(\frac{m(m-1)}{1.2}\right)^2 x^{m-2} + \cdots + \left(\frac{m}{1}\right)^2 x + 1 = 0$$

a toutes ses racines réelles et inégales. (H. Laurent.)

VI. Théorème. — *L'équation*

$$x^{m+1} + Bx^{m-1} + Cx^{m-3} + \cdots + Sx + T = 0,$$

de degré impair, a au moins une racine réelle, comprise entre $2^{m+1}\sqrt{\frac{T}{2}}$ *et* $-2^{m+1}\sqrt{\frac{T}{2}}$. (Tchébychew.)

VII. Théorème. — *Si l'équation*

$$Ax^m + \cdots + Dx^p + Ex^{p-1} + Fx^{p-2} + Gx^{p-3} + \cdots + U = 0$$

(*) Jean-Baptiste Fourier, membre de l'Institut; né à Auxerre, en 1768; mort en 1830.

a toutes ses racines réelles, les coefficients D, E, F, G, *de quatre termes consécutifs, vérifient l'inégalité*

$$(DG - EF)^2 - 4(E^2 - DF)(F^2 - EG) < 0.$$

VIII. Théorème. — *Si l'équation*

$$x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \cdots \pm A_m = 0$$

a toutes ses racines positives, les nombres $A_1, A_2, \ldots A_m$ *vérifient les inégalités :*

$$A_1 > m\sqrt[m]{A_m}, \quad A_2 > \frac{m(m-1)}{1.2}\sqrt[m]{(A_m)^2},$$

$$A_3 > \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\sqrt[m]{(A_m)^3}, \ldots.$$

CHAPITRE XVI.

RECHERCHE DES RACINES COMMENSURABLES.

Conditions auxquelles satisfont les racines entières.

285. Théorème I. — 1° *Toute racine entière, d'une équation*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_m = 0 \qquad (1)$$

à coefficients entiers, divise :

Le dernier terme,

Le coefficient de x *augmenté du quotient de la première division,*

Le coefficient de x^2 *augmenté du quotient de la deuxième division,*

. . . .

Le coefficient de x^{m-1} *augmenté du quotient de la* $(m-1)^{ième}$ *division;*

2° *Le quotient de la dernière division est égal au coefficient du premier terme, pris en signe contraire;*

3° *Tout entier, qui jouit des propriétés précédentes, est racine de l'équation.*

Soit a une racine entière de l'équation (1). En représentant par

$$B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} + \cdots + B_{m-2}x + B_{m-1}$$

le quotient du premier membre par $x-a$, nous aurons (250):

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1 - B_0a, \quad A_2 = B_2 - B_1a, \ldots, \\ A_{m-1} = B_{m-1} - B_{m-2}a, \quad A_m = - B_{m-1}a. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Ces diverses égalités, dans lesquelles B_0, B_1, B_2, ..., B_{m-1} sont évidemment entiers, donnent

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_m}{a} = - B_{m-1}, \quad \dfrac{A_{m-1} - B_{m-1}}{a} = - B_{m-2}, \ldots, \\ \dfrac{A_1 - B_1}{a} = - B_0, \quad - B_0 = - A_0; \end{array}\right\} \quad (3)$$

en sorte que les deux premières parties du théorème sont démontrées.

D'ailleurs, l'élimination de B_1, B_2, B_3, ..., entre les équations (3), conduit à

$$A_m + A_{m-1}a + A_{m-2}a^2 + \cdots + A_1a^{m-1} + A_0a^m = 0;$$

donc *tout entier, qui satisfait aux conditions énoncées, est racine.*

Recherche des racines entières.

256. La détermination des racines entières résulte, immédiatement, du théorème précédent. En effet, après avoir cherché une limite supérieure et une limite inférieure des

racines (**254**), on formera tous les diviseurs du dernier terme de l'équation, compris entre ces deux limites, et l'on rejettera successivement ceux qui ne satisfont pas à toutes les conditions indiquées ci-dessus : les diviseurs restants seront les racines entières cherchées (*).

Les exemples suivants montrent suffisamment la marche à suivre.

257. *Applications.* — I. *Trouver les racines entières de l'équation*

$$f(x) = 2x^4 + 4x^3 - 39x^2 - 61x + 30 = 0.$$

On peut prendre pour limites — 7 et + 6. Les diviseurs de 30, compris entre ces deux quantités, sont, en excluant + 1 et — 1 :

$$5, \quad 3, \quad 2, \quad -2, \quad -3, \quad -5, \quad -6.$$

Le calcul se dispose ainsi (**) :

Diviseurs . . .	5	3	2	— 2	— 3	— 5	— 6
Quotients . . .	6	10	15	— 15	— 10	— 6	— 5
Dividendes . .	— 55	— 51	— 46	— 76	— 71	— 67	— 66
Quotients . . .	— 11	— 17	— 23	+ 38	»	»	+ 11
Dividendes . .	— 70	— 76	— 82	— 21	»	»	— 48
Quotients . . .	— 14	»	— 41	»	»	»	+ 8
Dividendes . .	— 10	»	»	»	»	»	+ 12
Quotients . . .	— 2	»	»	»	»	»	— 2

(*) On ne soumet pas à ces essais les diviseurs + 1 et — 1 : il est plus court, pour ceux-ci, d'employer la substitution directe.

(**) Les diviseurs, au lieu d'être essayés *simultanément*, peuvent l'être *successivement*. Ce second procédé, souvent plus expéditif que le premier, est moins régulier que celui-ci.

Les racines entières sont $+5$ et -6. Le quotient de $f(x)$ par $x+6$ est, d'après les équations (3) (**285**),

$$2x^3 - 8x^2 - 11x + 5.$$

De plus, ce polynôme, divisé par $x-5$, donne

$$2x^2 + 2x - 1.$$

Donc

$$f(x) = (x+6)(x-5)(2x^2+2x-1).$$

II. *Trouver les racines entières de l'équation*

$$f(x) = x^5 - 4x^4 - 101x^3 + 14x^2 + 504x + 576 = 0.$$

Les racines sont comprises entre -9 et $+13$. En opérant comme dans l'exemple précédent (*), on trouve que les racines entières sont -8 et $+12$. Par suite,

$$f(x) = (x+8)(x-12)(x^3 - 5x - 6).$$

288. *Remarques.* — I. On voit, par le second exemple, que l'on peut faire beaucoup d'essais inutiles. Pour en diminuer le nombre, on s'appuie sur la proposition suivante, dont la démonstration résulte, immédiatement, de la divisibilité *algébrique* de $f(x)$ par $x-a$ (**226**) :

Si a *est racine entière d'une équation* $f(x)=0$, *à coefficients entiers,* $a-1$ *divise* $f(1)$, *et* $a+1$ *divise* $f(-1)$.

Dans le dernier exemple :

$$f(1) = +1 - 4 - 101 + 14 + 504 + 576 = 990,$$
$$f(-1) = -1 - 4 + 101 + 14 - 504 + 576 = 182.$$

(*) *Voir*, ci-contre, le tableau des calculs.

Recherche des racines entières de l'équation

$$x^5 - 4x^4 - 101x^3 + 14x^2 + 504x + 576 = 0.$$

− 8	− 6	− 4	− 3	− 2	+ 2	+ 3	+ 4	+ 6	+ 8	+ 9	+ 12
− 72	− 96	− 144	− 192	− 288	+ 288	+ 192	+ 144	+ 96	+ 72	+ 64	+ 48
+ 432	+ 408	+ 360	+ 312	+ 216	+ 792	+ 696	+ 648	+ 600	+ 576	+ 568	+ 552
− 54	− 68	− 90	− 104	− 108	+ 396	+ 232	+ 162	+ 100	+ 72	»	+ 46
− 40	− 54	− 76	− 90	− 94	+ 410	+ 246	+ 176	+ 114	+ 86	»	+ 60
+ 5	+ 9	+ 19	+ 30	+ 47	+ 205	+ 82	+ 44	+ 19	»	»	+ 5
− 96	− 92	− 82	− 71	− 54	+ 104	− 49	− 57	− 82	»	»	− 96
+ 12	»	»	»	+ 27	+ 52	»	»	»	»	»	− 8
+ 8	»	»	»	+ 23	+ 48	»	»	»	»	»	− 12
− 1	»	»	»	»	+ 24	»	»	»	»	»	− 1

Le premier nombre n'admet aucun des diviseurs

$$(-6-1),\quad (-3-1),\quad (8-1),\quad (9-1).$$

Le second n'est divisible par aucune des quantités

$$(-4+1),\quad (2+1),\quad (3+1),\quad (4+1).$$

Par conséquent, les seuls diviseurs à essayer sont

$$-8,\quad -2,\quad +6,\quad +12.$$

II. Quand on a reconnu que l'équation proposée admet une racine entière a, on doit examiner si cette racine est *multiple*, c'est-à dire si l'équation a plusieurs *racines égales* à a (**221**). Pour cela, après avoir divisé $f(x)$ par $x-a$, on cherche si ce quotient est encore divisible par $x-a$; et ainsi de suite.

Limite du nombre des racines entières.

229. Théorème II (*). — *Soit* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$ *une équation à coefficients entiers. Soit* α *un entier quelconque, positif ou négatif. Si le produit*

$$f(\alpha)\,f(\alpha+1)\,f(\alpha+2)\ldots f(\alpha+n-1)$$

est divisible par n^{k}, k *est une limite supérieure du nombre des racines entières de l'équation* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$.

Supposons, pour fixer les idées, que l'équation proposée ait *quatre* racines entières a, b, c, d. Alors

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,\varphi(x),$$

(*) Dû à M. G. de Montebello (*Nouvelles Annales de mathématiques*, t. XVIII). Ce théorème, contenu en partie dans les *Recherches arithmétiques* de Gauss, renferme les propositions de Gauss et de M. Gerono, que nous citerons plus loin.

$\varphi(x)$ étant un polynôme à coefficients entiers; puis

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\alpha+1)\ldots f(\alpha+n-1) = & (\alpha-a)(\alpha+1-a)\ldots(\alpha+n-1-a) \\ & \times(\alpha-b)(\alpha+1-b)\ldots(\alpha+n-1-b) \\ & \times(\alpha-c)(\alpha+1-c)\ldots(\alpha+n-1-c) \\ & \times(\alpha-d)(\alpha+1-d)\ldots(\alpha+n-1-d) \\ & \times\varphi(\alpha)\varphi(\alpha+1)\ldots\varphi(\alpha+n-1). \end{aligned}$$

Les n facteurs contenus dans la première ligne du second membre sont *entiers et consécutifs;* donc *un de ces facteurs, et un seul, est divisible par* n (*). De même pour les facteurs contenus dans les trois lignes suivantes. D'ailleurs $\varphi(\alpha)\varphi(\alpha+1)\ldots\varphi(\alpha+n-1)$ est un entier, positif ou négatif. Donc *le premier membre de l'égalité est divisible par une puissance de* n *dont l'exposant est égal ou supérieur à quatre.* C'est ce qu'il fallait démontrer.

220. Corollaire I. — *Si aucune des quantités* $f(\alpha)$ $f(\alpha+1)$, ... $f(\alpha+n-1)$ *n'est divisible par* n, *l'équation* $f(x)=0$ *n'a pas de racine entière.*

221. Corollaire II. — *Si* $f(0)$ *et* $f(1)$ *sont impairs, l'équation n'a aucune racine entière* (**).

222. Corollaire III. — *Si aucune des quantités* $f(-1)$, $f(0)$, $f(+1)$ *n'est divisible par* 3, *l'équation n'a pas de racine entière* (***).

223. *Application.* — Soit, comme ci-dessus,

$$f(x) = x^5 - 4x^4 - 101x^3 + 14x^2 + 504x + 576;$$

d'où

$$f(0) = 576,\quad f(1) = 990,\quad f(-1) = 182.$$

(*) Si l'on ajoute à tous ces facteurs un même multiple de n, convenablement choisi, on les transforme en n nombres entiers consécutifs, parmi lesquels, évidemment, se trouve un multiple de n, et un seul.

(**) Gauss (*Nouvelles Annales*, t. XVI).

(***) Gerono (*Nouvelles Annales*, t. XVI). Il est bon d'observer que $f(0)$ est le dernier terme de l'équation.

Le produit de ces trois nombres est divisible par 3^4 et non divisible par 3^5; donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas plus de *quatre* racines entières.

224. Théorème III. — *Soit* $f(x)=0$ *une équation à coefficients entiers. Soit* p *un nombre premier, diviseur du dernier terme. Si* $f(p)$ *est divisible par* p^k, k *est une limite supérieure du nombre des racines entières divisibles par* p.

En effet, si a, b, c, d sont ces racines, on a

$$f(p)=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\varphi(p);$$

et le second membre de cette égalité est divisible par p^4.

Recherche des racines fractionnaires.

225. Théorème IV. — *Toute équation à coefficients entiers, dans laquelle le coefficient du premier terme est l'unité, n'a aucune racine fractionnaire.*

Soit, s'il est possible, $\frac{\alpha}{\beta}$ une *fraction irréductible* qui vérifie l'équation

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + A_m = 0, \tag{4}$$

A_1, A_2, ..., A_m étant entiers. Remplaçant x par $\frac{\alpha}{\beta}$, et multipliant tous les termes par β^{m-1}, nous aurons

$$\frac{\alpha^m}{\beta} \pm E = 0,$$

E désignant un nombre entier. Or, cette égalité est impossible, car $\frac{\alpha^m}{\beta}$ est une fraction irréductible. (*B.*, *Arith.*, 93 et 111).

226. Au moyen de ce théorème, on ramène la recherche des racines fractionnaires à la recherche des racines entières. En effet, si l'équation $f(x)=0$ n'a pas la forme (4), on peut toujours, en multipliant toutes les racines par un

nombre entier k, choisi convenablement, trouver une transformée $F(y) = 0$, dont le premier terme ait pour coefficient l'unité (**248**). Si $a, b, c, \ldots$ sont les racines entières de cette transformée, les racines de la proposée sont $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \ldots$

297. *Remarque.* — On pourrait, de cette manière, trouver à la fois les racines entières et les racines fractionnaires de l'équation $f(x) = 0$. Mais il vaut mieux la débarrasser d'abord de ses racines entières : le calcul de la transformée en devient plus simple.

298. *Application.*

$$f(x) = 21x^4 - 41x^3 + 45x^2 - 24x + 4 = 0.$$

Cette équation n'a pas de racines négatives. De plus, elle n'a aucune racine entière; car la méthode de Newton donne 1 pour limite supérieure. Changeant x en $\frac{y}{21}$, on trouve

$$F(y) = y^4 - 41y^3 + 945y^2 - 10\,548y + 37\,044 = 0.$$

Les valeurs de x étant plus petites que 1, 21 est une limite supérieure des valeurs de y. Il suffit donc d'essayer les diviseurs de 37 044, moindres que 21. Ces diviseurs sont :

2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18.

On peut même rejeter 3, 4, 7, 9, 12, 18; car ces facteurs, diminués d'une unité, ne divisent pas $F(1) = 27\,365$. Le calcul se réduit donc à ce qui suit :

2	6	14
18 522	6 174	2 646
+ 7 938	− 4 410	− 7 938
+ 3 969	− 735	− 567
+ 4 914	+ 210	+ 378
•	+ 33	+ 27
•	− 6	− 14
•	− 1	− 1

Les valeurs entières de y sont 6 et 14. Ainsi,

$$x=\frac{6}{21}=\frac{2}{7},\quad x=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}.$$

On trouve ensuite

$$f(x)=(7x-2)(3x-2)(x^2-x+1).$$

299. Au lieu de chercher la transformée $F(y)=0$ ([illegible]), on peut déterminer directement les racines fractionnaires de la proposée. Cette recherche est fondée sur la proposition suivante, dont la démonstration ne saurait embarrasser le lecteur.

300. Théorème V. — *Si la fraction irréductible* $\frac{\alpha}{\beta}$ *est racine d'une équation* $f(x)=0$, *à coefficients entiers : 1° α divise le dernier terme; 2° β divise le coefficient du premier terme; 3° le quotient de* $f(x)$, *par* $\beta x-\alpha$, *est un polynôme à coefficients entiers.*

301. *Application.* — Soit, comme précédemment,

$$f(x)=21x^4-41x^3+43x^2-24x+4=0.$$

Les fractions à essayer sont $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$. Les coeffi-

cients des quotients correspondants sont, par la règle connue (250, II).

21 — 34	»	»	»	$\frac{1}{3}$ n'est pas racine.
21 — 38	»	»	»	$\frac{1}{7}$ n'est pas racine.
21 — 27 + 27 — 6			0	$\frac{2}{3}$ est racine (*).
21 — 21 + 21		0		$\frac{2}{7}$ est racine.

Limite du nombre des racines fractionnaires.

302. Le Théorème II s'applique aux racines fractionnaires comme aux racines entières, pourvu que n soit premier avec le coefficient du premier terme de $f(x)$ (**).

Exercices.

I. Trouver les racines commensurables des équations

$$6x^4 - 19x^3 + 28x^2 - 18x + 4 = 0,$$
$$8x^4 - 38x^3 + 49x^2 - 22x + 3 = 0,$$
$$64x^4 - 328x^3 + 574x^2 - 593x + 90 = 0.$$

II. Résoudre complétement les équations

$$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6 = 0,$$
$$x^6 - 12x^5 + 54x^4 - 104x^3 + 45x^2 + 108x - 108 = 0,$$
$$x^8 - 12x^7 + 53x^6 - 92x^5 - 9x^4 + 212x^3 - 153x^2 - 108x - 108 = 0,$$
$$21x^6 - 83x^5 - 2\,393x^4 + 4\,806x^3 - 5\,348x^2 + 2\,872x - 480 = 0.$$

(*) Le quotient de $f(x)$ par $x - \frac{2}{3}$ étant $21x^3 - 27x^2 + 27x - 6$, nous avons divisé ce polynôme par $x - \frac{2}{7}$: le second quotient est $21(x^2 - x + 1)$.

(**) *Nouvelles Annales*, t. XVIII.

I. Trouver [illegible] nuères de x et de y qui vérifient [illegible] équations

$$[illegible] = 946.$$

$$[illegible] = 186.$$

[illegible]

$$[illegible] = 16\,807.$$

[illegible]

$$[illegible] \quad [illegible] \quad [illegible] = 12\,584.$$

[illegible] quatre parties telles, [illegible] deuxième, le cube [illegible] quatrième, soient [illegible]

[illegible]

[illegible]

CHAPITRE XVII.

DES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS.

Préliminaires.

303. La résolution des équations du premier degré est fondée sur la proposition suivante : *On peut remplacer le système de deux équations, par un autre système formé des proposées et de l'équation qu'on obtient en les ajoutant membre à membre, après avoir multiplié l'une d'elles par un facteur constant* λ (*B., Alg.*, 65). Ce principe, qui subsiste pour les équations de degré quelconque, peut, étant convenablement modifié, s'appliquer à *la recherche des racines communes à deux équations algébriques*

$$F_1(x) = 0, \quad F_2(x) = 0. \tag{1}$$

En effet, si ces équations ont une racine commune a, celle-ci satisfait à l'équation

$$F_1(x) + \lambda F_2(x) = 0.$$

Réciproquement, toute racine commune aux équations

$$F_2(x) = 0, \quad F_1(x) + \lambda F_2(x) = 0, \tag{2}$$

est une racine de l'équation $F_1(x) = 0$. Par conséquent, le système (2) *équivaut* au système (1).

Plus grand commun diviseur de deux polynômes.

304. Avant d'aller plus loin, remarquons que si les équations (1) admettent plusieurs racines communes a, b, c, ...,

k, leurs premiers membres sont divisibles par le produit

$$(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k)$$

des facteurs correspondant à ces racines, et qu'il en est de même pour les premiers membres des équations (2). Si l'on convient d'appeler ***plus grand commun diviseur*** de deux polynômes entiers $\varphi(x)$, $\psi(x)$, le produit des facteurs du premier degré, de la forme $x-\alpha$, communs à ces polynômes, on voit que ***le plus grand commun diviseur des polynômes*** $F_1(x)$ ***et*** $F_2(x)$, ***est égal au plus grand commun diviseur des polynômes*** $F_2(x)$ ***et*** $F_1(x)+\lambda F_2(x)$.

203. Les conclusions précédentes subsistent si l'on remplace la constante λ par une fonction de x, pourvu que cette fonction ne devienne pas infinie pour une valeur de x satisfaisant au système (1) ou au système (2) : en particulier, λ peut être un polynôme entier, déterminé de façon que le second système soit plus simple que le premier.

En effet, en supposant le degré de $F_1(x)$ égal ou supérieur au degré de $F_2(x)$, divisons le premier polynôme par le second, de manière à obtenir un quotient entier Q et un reste $F_3(x)$, de degré moindre que le diviseur. A cause de

$$F_1(x)=F_2(x)\,.\,Q+F_3(x),$$

si nous prenons $\lambda=-Q$, le système (2) se réduit à

$$F_2(x)=0,\quad F_3(x)=0.$$

Conséquemment, ***les racines communes aux équations***

$$F_1(x)=0,\quad F_2(x)=0, \tag{1}$$

sont les mêmes que les racines communes aux équations

$$F_2(x)=0,\quad F_3(x)=0, \tag{3}$$

$F_3(x)$ ***étant le reste de la division de*** $F_1(x)$ ***par*** $F_2(x)$; ou, ce qui est équivalent :

Le plus grand commun diviseur de deux polynômes est le même que le plus grand commun diviseur entre l'un d'eux et le reste de la division de l'autre par celui-ci.

306. *Remarque.* — Si $F_1(x)$ est exactement divisible par $F_2(x)$, ce second polynôme est le plus grand commun diviseur. En même temps, *toutes les racines* de l'équation $F_2(x) = 0$ appartiennent à $F_1(x) = 0$.

307. Les raisonnements précédents s'appliquent au système (3), puis à celui qu'on en déduirait comme le système (3) a été déduit de (1); etc. Donc, *après avoir divisé* $F_1(x)$ *par* $F_2(x)$, *on divise ce second polynôme par le reste* $F_3(x)$, *puis ce premier reste par le deuxième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un reste* $F_n(x)$ *qui divise exactement le reste précédent : ce dernier reste est le plus grand commun diviseur des polynômes* $F_1(x)$, $F_2(x)$; *et les racines de l'équation* $F_n(x) = 0$ *sont les racines communes aux équations* $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$.

308. *Remarques.* — I. Si l'on arrive à un reste numérique, les équations $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$ n'ont aucune racine commune; et leurs premiers membres sont dits *premiers entre eux.*

II. Dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes, on peut, afin de simplifier les calculs, multiplier par un facteur numérique arbitraire, soit un dividende quelconque, soit même un dividende *partiel* quelconque. En effet, l'introduction de ces quantités numériques n'altère pas les facteurs de la forme $x - \alpha$, communs aux polynômes proposées.

III. Les explications précédentes suffisent lorsque, comme nous l'avons supposé, les deux polynômes donnés sont *fonctions d'une seule lettre.* La recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes contenant deux ou plusieurs lettres; et, à plus forte raison, la *théorie* com-

plète *du plus grand commun diviseur* exigerait des développements dans lesquels nous croyons ne pas devoir entrer.

300. *Application.*

$$F_1(x) = 2x^6 + x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1,$$
$$F_2(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2.$$

Voici le tableau des calculs :

$$\begin{array}{r|l}
2x^6 + x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1 & 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2 \\
\hline
-2x^6 - 3x^5 - 4x^4 - x^3 + 2x^2 & x^2 - x - 1 \\
\hline
-2x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 2x - 1 & \\
+2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x & \\
\hline
-2x^4 + x^3 + 4x^2 \qquad - 1 & \\
+2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2 & \\
\hline
4x^3 + 8x^2 + x - 3 = F_3(x). &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2 & 4x^3 + 8x^2 + x - 3 \\
\hline
(^*) \quad 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 2x - 4 & x - 1 \\
-4x^4 - 8x^3 - x^2 + 3x & \\
\hline
-2x^3 + 7x^2 + 5x - 4 & \\
(^*) \quad -4x^3 + 14x^2 + 10x - 8 & \\
+4x^3 + 8x^2 + x - 3 & \\
\hline
(^*) \quad 22x^2 + 11x - 11 & \\
2x^2 + x - 1 = F_4(x). &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
4x^3 + 8x^2 + x - 3 & 2x^2 + x - 1 \\
\hline
-4x^3 - 2x^2 + 2x & 2x + 3 \\
\hline
6x^2 + 3x - 3 &
\end{array}$$

La troisième division se faisant exactement, le plus grand commun diviseur des polynômes donnés est

$$F_4(x) = 2x^2 + x - 1 \ (^{**}).$$

(*) Le premier et le second dividende ont été multipliés par 2 ; le reste a été divisé par 11. Le binôme $x - 1$ n'est donc pas le quotient de $F_2(x)$ par $F_3(x)$: ce quotient serait $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

(**) Ou plutôt $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Par suite, les racines communes aux équations $F_1(x)=0$, $F_2(x)=0$, sont données par $2x^2+x-1=0$. On trouve $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$.

210. *Remarque.* — La méthode des racines commensurables (**186**, **195**), appliquée aux équations $F_1(x)=0$, $F_2(x)=0$, aurait fait découvrir que les premiers membres sont divisibles par $(x+1)(x-\frac{1}{2})$. Supprimant ce facteur, on serait arrivé aux équations

$$x^4-2x+1=0, \quad x^2+x+2=0,$$

dont les premiers membres sont premiers entre eux. On voit donc que, *avant d'effectuer l'opération du plus grand commun diviseur, sur les premiers membres de deux équations données, on doit chercher les racines commensurables de ces équations.*

Exercices.

I. Trouver les racines communes aux équations

$$x^5+x^4-18x^3+19x^2+29x+4=0,$$
$$2x^4-16x^3+23x^2-2x-1=0.$$

II. Même recherche pour les équations

$$x^6-13x^4+8x^3+19x^2+8x+1=0,$$
$$3x^5-26x^3+12x^2+19x+4=0.$$

III. Théorème. — *Soient* F_0, F_1 *deux polynômes à coefficients entiers, dont les degrés sont* m, m — 1. *Soit* F_2 *le reste de la division de* $B_0^2 F_0$ *par* F_1, B_0 *étant le coefficient du premier terme de* F_1. *Soit, semblablement,* F_3 *le reste de la division de* $C_0^2 F_1$ *par* F_2, C_0 *étant le coefficient du premier terme de* F_2. *Si les degrés des restes* F_2, F_3 *sont,*

comme il arrive ordinairement, m — 2, m — 3, *le deuxième reste,* F_3, *est divisible par* B_0^2 (*).

IV. Appliquer le théorème précédent à la recherche du plus grand commun diviseur entre

$$F_0 = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad F_1 = 7x^3 + 4x^2 + x + 1.$$

Résultat :

$$F_2 = 79x^2 + 39x + 46, \quad F_3 = -7^2(426x - 87), \quad F_4 = R = 79^2.1\,665.$$

CHAPITRE XVIII.

THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

Préliminaires.

211. LEMME. — *Si une équation* f(x) = 0 *n'a pas de racines égales, les polynômes* f(x), f'(x) *sont premiers entre eux.*

Soit

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k)(x-l);$$

d'où (**128**)

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \dots + \frac{f(x)}{x-l}.$$

Le binôme $x - a$ divise les *polynômes entiers* $\frac{f(x)}{x-b}$, ..., $\frac{f(x)}{x-l}$; mais il ne divise pas

$$\frac{f(x)}{x-a} = (x-b)(x-c)\dots(x-k)(x-l):$$

(*) Ce théorème est dû, en partie, à M. Labatie (*Méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur,* 2e édition, p. 8). Mais la démonstration de l'auteur exige que les coefficients de F_0, F_1, soient des polynômes; ce qui n'est pas nécessaire (*Mélanges mathématiques,* p. 252).

ce binôme n'est donc pas facteur de $f'(x)$. Le même raisonnement est applicable aux binômes $x-b$, $x-c$, ..., $x-l$; donc $f(x)$ et $f'(x)$ sont premiers entre eux.

212. THÉORÈME. — *Si une équation* $f(x)=0$ *a des racines égales, les polynômes* $f(x)$, $f'(x)$ *ont un plus grand commun diviseur formé du produit des facteurs correspondant aux racines égales, chacun d'eux étant pris une fois de moins que dans* $f(x)$.

Pour fixer les idées, supposons que l'équation $f(x)=0$ ait p racines égales à a, q racines égales à b, r racines égales à c, et un certain nombre de racines simples. En représentant par $\varphi(x)$ (*) le produit des facteurs correspondant à ces dernières racines, nous aurons

$$f(x)=(x-a)^p(x-b)^q(x-c)^r\varphi(x). \qquad (1)$$

Par suite,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{p}{x-a}+\frac{q}{x-b}+\frac{r}{x-c}+\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \qquad (2)$$

et

$$f'(x)=\mathrm{D}\left[\psi(x)+(x-a)(x-b)(x-c)\varphi'(x)\right], \qquad (3)$$

si l'on fait, pour abréger :

$$\psi(x)=\left(\frac{p}{x-a}+\frac{q}{x-b}+\frac{r}{x-c}\right)(x-a)(x-b)(x-c)\varphi(x),$$

$$\mathrm{D}=(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}(x-c)^{r-1}.$$

Cela posé, les polynômes $f(x)$, $f'(x)$ sont divisibles par D. De plus, le raisonnement employé ci-dessus (**211**) montre que les quotients $\frac{f(x)}{\mathrm{D}}$, $\frac{f'(x)}{\mathrm{D}}$ sont *premiers entre eux;* donc $f(x)$ et $f'(x)$ ont, pour plus grand commun diviseur, le produit D.

(*) Si l'équation proposée n'a que des racines multiples, $\varphi(x)$ se réduit à l'unité.

213. Corollaire. — *Pour qu'une équation* $f(x) = 0$ *ait des racines égales, il faut et il suffit que les polynômes* $f(x)$, $f'(x)$ *aient un commun diviseur, ou,* ce qui est équivalent, *que cette équation et l'équation dérivée,* $f'(x) = 0$, *aient une ou plusieurs racines communes.*

Réduction d'une équation qui a des racines égales.

214. Les explications précédentes montrent comment on peut *reconnaître qu'une équation* $f(x) = 0$ *a des racines égales*. On peut aller plus loin et *ramener la résolution de* $f(x) = 0$ *à la résolution d'autres équations donnant, respectivement, les racines simples, les racines doubles, les racines triples, ..., de la proposée, abstraction faite des degrés de multiplicité de ces racines.*

Représentons par X_1 le produit des facteurs correspondant aux racines simples, par X_2 le produit des facteurs correspondant aux racines doubles, par X_3 le produit des facteurs correspondant aux racines triples, ..., *chaque facteur étant pris une seule fois;* et, pour fixer les idées, supposons que la proposée n'ait aucune racine dont le *degré de multiplicité* surpasse 4. Nous aurons

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4.$$

Soit D le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$: d'après le théorème ci-dessus, $D = X_2 X_3^2 X_4^3$.

De même, le plus grand commun diviseur entre D et sa dérivée est $D_1 = X_3 X_4^2$.

De même encore, le plus grand commun diviseur entre D_1 et sa dérivée est $D_2 = X_4$.

D_2 ne contenant plus de facteurs multiples, le plus grand commun diviseur D_3, entre ce polynôme et sa dérivée, serait l'unité.

Divisons $f(x)$ par D, D par D_1, etc.; nous aurons :

$$\frac{f(x)}{D} = Q = X_1X_2X_3X_4,$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = X_2X_3X_4,$$

$$\frac{D_1}{D_2} = Q_2 = X_3X_4,$$

$$\frac{D_2}{D_3} = Q_3 = X_4.$$

En troisième lieu, divisons Q par Q_1, Q_1 par Q_2, etc.; nous aurons enfin :

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1, \quad \frac{Q_1}{Q_2} = X_2, \quad \frac{Q_2}{Q_3} = X_3, \quad Q_3 = X_4.$$

Les équations cherchées sont donc :

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0.$$

215. *Remarques.* — I. L'équation $Q = 0$ admet toutes les racines de la proposée, mais chacune d'elles une fois seulement.

II. A cause des longs calculs qu'exige la *méthode des racines égales,* on doit, avant de l'appliquer à une équation proposée, s'assurer que celle-ci n'admet aucune racine commensurable.

III. La remarque précédente et les théorèmes I et II, énoncés ci-après, prouvent qu'*il est inutile d'appliquer la méthode des racines égales aux équations des cinq premiers degrés.*

216. *Application.*

$$f(x) = x^6 - 7x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$ est

$$D = x^2 - x - 1.$$

On a ensuite

$$D_1 = 1;$$

puis :

$$\frac{f(x)}{D} = Q = x^4 + x^3 - 5x^2 + 2, \quad \frac{D}{D_1} = Q_1 = x^2 - x - 1,$$

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1 = x^2 + 2x - 2, \quad Q_1 = X_2 = x^2 - x - 1;$$

donc

$$f(x) = (x^2 + 2x - 2)(x^2 - x - 1)^2.$$

Exercices.

I. Théorème. — *Si une équation a une seule racine multiple, cette racine est commensurable* (*).

II. Théorème. — *Si une équation a des racines dont les degrés de multiplicité soient différents les uns des autres, ces racines sont commensurables* (*).

III. Théorème. — *Si* $f(x)$ *est divisible par* $(x-a)^n$, a *est racine des équations*

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \ldots, \quad f^{n-1}(x) = 0;$$

et réciproquement.

IV. Exprimer que l'équation $x^m + px^n + q = 0$ a une racine double.

V. Résoudre complètement l'équation

$$4x^6 - 32x^5 + 121x^4 - 229x^3 + 251x^2 - 152x + 44 = 0.$$

Résultat :

$$x = \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{7}\sqrt{-1}), \quad x = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{19}\sqrt{-1}).$$

(*) Il est sous-entendu que les coefficients de l'équation sont commensurables.

VI. Même recherche pour l'équation

$$x^{10}-2x^9+x^8-4x^7+x^6-6x^5-x^4-4x^3-x^2-2x-1=0.$$

Résultat :

$$x=1\pm\sqrt{2},\quad x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}),\quad x=-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}).$$

VII. Résoudre l'équation

$$a^4x^9-3a^4x^8+4a^2(1+a^2)x^6-6a^2x^5-6a^2x^4$$
$$+4(1+a^2)x^3-5x+1=0.$$

Résultat :

$$x=-1,\quad a^2x^4-2a^2x^3+2x-1=0.$$

VIII. Théorème. — *Soit* $f(x)=[x(1-x)]^n$ *: l'équation* $f^{(n)}(x)=0$ *a toutes ses racines comprises entre* 0 *et* 1.

(Gauss.)

IX. Théorème. — *Soit* $f(x)=X_1X_2^2X_3^3\ldots$; *soit* D *le plus grand commun diviseur entre* $f(x)$ *et* $f'(x)$; *soit enfin* D′ *la dérivée de* D : *le plus grand commun diviseur entre* $\frac{f(x)D'}{D^2}$ *et* $\frac{f(x)}{D}$ *est* X_1. (Ostrogradski.)

CHAPITRE XIX.

THÉORÈME DE STURM (*).

217. Le théorème que nous allons exposer fait connaître exactement le nombre des racines d'une équation proposée, comprises entre deux quantités quelconques. Au point de

(*) Charles Sturm, géomètre profond, professeur remarquable et homme excellent; né à Genève, le 29 septembre 1803; mort à Vanves, près de Paris, le 18 décembre 1855.

vue de la théorie pure, il est beaucoup plus satisfaisant que les Théorèmes de Descartes, de Rolle, de Fourier (*), ... : on pourrait dire qu'il est la perfection même. Malheureusement, les calculs qu'il exige en rendent l'application fort difficile, dès que l'équation s'élève au cinquième degré.

218. Soit $V = 0$ une équation qui n'a pas de racines égales. Soit V_1 la dérivée de V. Concevons que l'on cherche le plus grand commun diviseur entre V et V_1, en ayant soin, après chaque division, de *changer le signe du reste.* Soient V_2, V_3, ..., V_r (**) ces restes ainsi modifiés : V_r est numérique, attendu que V et V_1 sont premiers entre eux. Cela posé, on a la proposition suivante :

219. Théorème. — *Si, dans la suite des fonctions*

$$V, \quad V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_r, \qquad \text{(A)}$$

on remplace x *par des quantités quelconques* α, β; *l'excès du nombre de variations de signes que présente la suite pour* $x = \alpha$, *sur le nombre de variations qu'elle présente pour* $x = \beta$, *égale le nombre des racines de* $V = 0$, *comprises entre* α *et* β. (On suppose $\alpha < \beta$.)

Démonstration. — 1° Si l'on fait croître x, d'une manière continue, depuis α jusqu'à β, les fonctions conservent leurs signes respectifs, tant qu'aucune d'elles ne s'annule : le nombre des variations de la suite (A) sera donc ce qu'il était pour $x = \alpha$.

2° *Deux fonctions consécutives ne peuvent s'annuler en même temps.*

La proposition est visible pour les fonctions V, V_1, puisqu'elles n'ont aucun facteur commun. Soient donc trois

(*) *Voir* p. 224.

(**) Ces notations sont celles que Sturm a employées dans le célèbre Mémoire présenté, en 1829, à l'Académie des sciences de Paris.

fonctions *intermédiaires* quelconques, V_{n-1}, V_n, V_{n+1}. On a, entre ces quantités, la relation

$$V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1}, \qquad (1)$$

Q_n représentant le quotient de V_{n-1} par V_n. Si les fonctions V_n, V_{n+1} s'annulaient pour une même valeur de x, $x=\gamma$, cette valeur annulerait aussi V_{n-1}; et, en remontant dans la suite des égalités dont (1) est le type, on trouverait que $x=\gamma$ annule, simultanément, V et V_1 (*).

3° ***Si une valeur particulière de* x *annule une fonction intermédiaire, la fonction précédente et la fonction suivante présentent une variation.***

En effet, lorsque $V_n=0$, l'égalité (1) devient $V_{n-1}=-V_{n+1}$.

4° ***Tant que* x *ne devient pas égal à une racine de* V=0, *le nombre des variations de la suite* (A) *est constant.***

Soit γ une valeur de x qui annule V_n. Soit h une quantité assez petite pour que, de $x=\gamma-h$ à $x=\gamma+h$, aucune des fonctions V_{n-1}, V_{n+1} ne s'annule. Les signes des résultats peuvent être figurés ainsi (**) :

	V_{n-1}	V_n	V_{n+1}
$x=\gamma-h$	+	»	—
$x=\gamma$	+	0	—
$x=\gamma+h$	+	»	—

Or, quels que soient les signes que l'on attribue à V_n, dans la première ligne et dans la troisième, les trois fonctions présentent et *conservent* une seule variation.

5° ***Lorsque* x *devient égal à une racine* a *de* V=0, *la suite* (A) *perd une variation.***

(*) On peut aussi procéder par voie *descendante ;* et alors on arrive à cette conclusion absurde, que la quantité *numérique* V_r s'annule pour $x=\gamma$.

(**) Pour fixer les idées, nous supposons que, des deux quantités V_{n-1}, V_{n+1}, égales et de signes contraires pour $x=\gamma$, la première soit positive pour cette valeur de x.

Si, de $x = a - h$ à $x = a + h$, la fonction V_1 *reste positive,* la fonction V, qui a pour dérivée V_1, est *croissante* (163); donc elle passe du négatif au positif. Au contraire, si la dérivée V_1 reste *négative,* la fonction V est *décroissante :* elle passe du positif au négatif. Dans les deux cas, les fonctions V, V_1 présentent une *variation* pour $x = a - h$, et une *permanence* pour $x = a + h$.

6° Puisque la suite (A) perd une variation chaque fois que x devient égal à une racine de l'équation $V = 0$, comprise entre α et β, autant il y a de ces racines, autant il y a de variations perdues. C'est ce qu'il fallait démontrer.

220. *Application. — Combien l'équation*

$$x^4 - 2x^2 + x - 1 = 0$$

a-t-elle de racines positives?

Voici le tableau des calculs :

$$\begin{array}{rrl}
V = & x^4 - 2x^2 + x - 1 & \;\Big|\; \underline{4x^3 - 4x + 1 = V_1} \\
 & 4x^4 - 8x^2 + 4x - 4 & \;\Big|\; x \\
-V_2 = & -4x^2 + 5x - 4 & \\
 & 4x^3 \quad - 4x + 1 & \;\Big|\; \underline{4x^2 - 5x + 4} \\
 & + 3x^2 - 8x + 1 & \;\Big|\; x + 3 \\
 & 12x^2 - 32x + 4 & \\
-V_3 = & -23x - 8 & \\
 & 4x^2 - 5x + 4 & \;\Big|\; \underline{23x + 8} \\
 & 2\,116x^2 - 1\,587x + 2\,116 & \;\Big|\; 92x - 101 \\
 & \underline{-\quad 736} & \\
 & -2\,323x + 2\,116 & \\
 & \underline{+\quad 808} & \\
-V_4 = & 2\,924. &
\end{array}$$

Ainsi :

$$V = x^4 - 2x^2 + x - 1, \quad V_1 = 4x^3 - 4x + 1,$$

$$V_2 = 4x^2 - 5x + 4, \quad V_3 = 23x + 8, \quad V_4 = -2\,924.$$

On a ensuite :

	V	V_1	V_2	V_3	V_4
$x=0$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x=+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$

L'équation a donc une seule racine positive.

221. *Remarques.* — I. Conformément à une remarque déjà faite (**209**), nous avons multiplié certains dividendes par 4 et par $23^2=529$. Les facteurs que l'on introduit ainsi, dans le dessein de simplifier le calcul, doivent être *essentiellement positifs.*

II. Le Théorème de Sturm est applicable, moyennant quelques modifications, à une équation qui a des racines égales. Si, d'ailleurs, au lieu de trouver un reste numérique $-V_r$, on arrive à une fonction V_m qui divise exactement la fonction précédente, on remplacera la proposée par $\frac{V}{V_m}=0$ (**214**); et, au lieu de la suite (A), on prendra

$$\frac{V}{V_m},\ \frac{V_1}{V_m},\ \frac{V_2}{V_m},\ \dots,\ \frac{V_m}{V_m}=1.$$

Conditions de réalité des racines.

222. Le Théorème de Sturm donne, de la manière la plus simple possible, les conditions nécessaires pour qu'une équation

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\dots+A_{m-1}x+A_m=0,$$

dont les coefficients sont *inconnus,* ait toutes ses racines réelles. Pour qu'il en soit ainsi : 1° *la suite* (A) *doit renfermer* m + 1 *fonctions; 2° les coefficients des premiers termes de ces fonctions doivent être positifs.* En effet, si ces deux conditions n'étaient pas remplies, la suite (A) ne pourrait perdre m variations, de $x=-\infty$ à $x=+\infty$.

Le nombre des *inégalités de condition* semble donc être

$m+1$. Mais, comme les premiers termes des fonctions V, V_1 sont x^m, mx^{m-1}, ce nombre se réduit à $m-1$ (*).

222. *Application au troisième degré.* — Soit

$$V = x^3 + px + q;$$

d'où résultent :

$$V_1 = 3x^2 + p,\quad V_2 = -2px - 3q,\quad V_3 = -4p^3 - 27q^2.$$

Les conditions énoncées sont

$$-p > 0,\quad -4p^3 - 27q^2 > 0;$$

et celles-ci se réduisent à

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

Exercices.

I. Quelles sont les conditions de réalité des racines de l'équation

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0?$$

Réponse :

$$A < 0,\quad 2A(A^2 - 4C) + 9B^2 < 0,$$
$$16(A^2 - 4C)^2 - 4AB^2(A^2 - 36C) - 27B^4 > 0.$$

II. Appliquer le Théorème de Sturm à l'équation

$$V = x^4 + x^3 - 15x^2 - 19x - 3 = 0.$$

Résultats :

$$V_1 = 4x^3 + 3x^2 - 30x - 19,\quad V_2 = 123x^2 + 196x + 29,$$
$$V_3 = 193\,399x + 137\,958,\quad V_4 = 2\,851\,068\,313\,059.$$

L'équation a toutes ses racines réelles.

(*) Avant Sturm, le nombre des conditions dont il s'agit était supposé égal à $\frac{m(m-1)}{2}$. Dans certains cas, ainsi qu'on va le voir, la limite $m-1$ peut encore être réduite.

III. Même question pour l'équation

$$V = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$$

Résultats :

$V_1 = 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1,$
$V_2 = 11x^4 + 14x^3 - 33x^2 + 31x - 37,$
$V_3 = -1\,050x^3 + 1\,683x^2 - 1\,731x + 597,$
$V_4 = -10\,200\,643x^2 - 37\,927\,049x + 58\,788\,113,$
$V_5 = 2\,971\,279\,748\,993\,533x - 3\,412\,517\,994\,900\,330\,020,$
$V_6 = -N$; le nombre N a, au moins, *quarante-quatre chiffres.*

L'équation a toutes ses racines imaginaires (*).

CHAPITRE XX.

ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ ET DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Discussion de $x^3 + px + q = 0$.

324. En faisant disparaître le deuxième terme (**252**) d'une équation quelconque du troisième degré, à une seule inconnue et à coefficients réels, on la réduit à la forme

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1}$$

p et q étant des quantités réelles.

Sans rendre l'équation (1) moins générale, on peut supposer le dernier terme positif. En effet, l'équation

$$x^3 + px - q = 0, \tag{2}$$

(*) Ces deux exemples sont tirés d'un Mémoire de M. Midy, publié en 1836. Ils justifient ce que nous avons dit ci-dessus (**317**). Remarquons d'ailleurs que les longueurs de calcul, inhérentes à l'application du Théorème de Sturm, sont précisément celles qui rendent presque illusoire la *Méthode des racines égales* (**315**, II).

a ses racines égales et de signes contraires aux racines de l'équation (1).

Cela posé, si le coefficient p est positif, il résulte immédiatement, du Théorème de Descartes, que l'équation (1) a *une seule racine réelle*, laquelle est *négative* (*). Par conséquent, pour que cette même équation (1) *puisse avoir* ses trois racines réelles, p doit être négatif. Changeons donc p en $-p'$, et discutons l'équation

$$x^3 - p'x + q = 0, \qquad (3)$$

en supposant

$$p' > 0, \quad q > 0.$$

Désignant par y le premier membre, et faisant varier x, de 0 à $+\sqrt{p'}$ (**), on voit que la fonction y, égale à q pour ces valeurs extrêmes de x, a un minimum, déterminé par $3x^2 - p' = 0$ (164), ou $x = +\sqrt{\frac{p'}{3}}$. Suivant que ce minimum, égal à $q - \frac{2}{3}p'\sqrt{\frac{p'}{3}}$, est *positif*, *nul* ou *négatif*, l'équation (3) a *deux racines imaginaires*, ou *deux racines positives égales*, ou *deux racines positives inégales* (***).

D'après cela :

1° La *condition de réalité et d'inégalité* des trois racines de l'équation (1) est $q < \frac{2}{3}p'\sqrt{\frac{p'}{3}}$, ou $27q^2 < 4p'^3$, ou enfin, à cause de $p' = -p$,

$$4p^3 + 27q^2 < 0 : \qquad (4)$$

ainsi qu'on pouvait s'y attendre, elle est indépendante du signe de q (****).

(*) A cause de $q > 0$.

(**) Cette dernière quantité est évidemment une limite supérieure des racines.

(***) On rend cette discussion encore beaucoup plus simple, si l'on considère la courbe dont y est l'ordonnée.

(****) Cette condition a été trouvée ci-dessus (222), au moyen du Théorème de Sturm.

2° Si $$4p^3 + 27q^2 = 0,$$
l'équation (1) a *deux racines égales*.

3° Enfin, la relation
$$4p^3 + 27q^2 > 0$$
exprime que l'équation (1) a *deux racines imaginaires*.

225. *Remarques.* — I. La condition $p < 0$, que nous avons trouvée en commençant, est comprise dans la relation (4).

II. Quand l'équation (1) a ses trois racines réelles, les deux racines de même signe sont comprises, l'une entre 0 et $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$, l'autre entre $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et $\pm\sqrt{-p}$.

Équations binômes du troisième degré.

226. Soit d'abord l'équation
$$x^3 = 1, \tag{5}$$
qui donne
$$x = \sqrt[3]{1}. \tag{6}$$
En la mettant sous la forme $x^3 - 1 = 0$, ou
$$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0,$$
on voit qu'elle a pour racines
$$x = 1,\quad x = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}). \tag{7}$$
Par conséquent, *l'unité positive a trois racines cubiques; l'une de ces racines est égale à* $+1$, *et les deux autres sont imaginaires.*

227. *Remarques.* — I. Les trois valeurs de $\sqrt[3]{-1}$ sont, à cause des formules (7),
$$x = -1,\quad x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}).$$

II. *Des deux racines cubiques imaginaires de l'unité, l'une est le carré de l'autre.* En effet, α, β étant ces racines, on a simultanément, à cause de $x^2 + x + 1 = 0$:

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0,$$
$$\beta + \alpha \quad = -1;$$

donc $\beta = \alpha^2$.

228. Considérons à présent l'équation

$$x^3 = A, \tag{8}$$

ou, ce qui est équivalent, la formule

$$x = \sqrt[3]{A}; \tag{9}$$

et, pour abréger, supposons $A > 0$.

En représentant par a la valeur réelle de x, ou la valeur *arithmétique de* $\sqrt[3]{A}$, et posant $x = ay$, nous réduirons l'équation (8) à

$$y^3 = 1. \tag{10}$$

Par suite, *toute quantité positive* A *a trois racines cubiques, que l'on obtient en multipliant la valeur arithmétique de* $\sqrt[3]{A}$ *par les trois racines cubiques de l'unité.*

229. Plus généralement, *si* a *désigne une valeur quelconque de* $\sqrt[3]{A}$, *et que* θ *et* θ^2 *soient les racines cubiques imaginaires de l'unité* (**226**), *les deux dernières valeurs de* $\sqrt[3]{A}$ *sont* $a\theta$ *et* $a\theta^2$, *même lorsque* A *est imaginaire.*

Ce dernier cas donne lieu au problème suivant.

230. PROBLÈME. — *Ramener l'expression* $\sqrt[3]{A + B\sqrt{-1}}$ *à la forme* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

De

$$\sqrt[3]{A + B\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

on conclut, en élevant au cube,

$$A = \alpha^3 - 3\alpha\beta^2, \quad B = 3\alpha^2\beta - \beta^3;$$

et, par les propriétés des modules (208),

$$\sqrt[3]{A^2 + B^2} = \alpha^2 + \beta^2.$$

Éliminant β^2 ou α^2 entre cette équation et une des deux précédentes, on obtient, en représentant par γ^2 la valeur positive du radical, soit

$$\alpha^3 - \frac{3}{4}\gamma^2\alpha - \frac{1}{4}A = 0, \tag{11}$$

soit

$$\beta^3 - \frac{3}{4}\gamma^2\beta + \frac{1}{4}B = 0. \tag{12}$$

Pour fixer les idées, considérons l'équation (11). Elle a au moins une racine réelle α_1 (*), dont on pourra trouver la valeur exacte ou une valeur approchée (Chap. XVI et XXIII). Si β_1 est la racine *correspondante* de l'équation (12), donnée par la formule

$$\beta_1 = \pm\sqrt{\gamma^2 - \alpha_1^2}\ (^{**}),$$

les trois valeurs de $\sqrt[3]{A + B\sqrt{-1}}$ seront

$$\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1},\quad \theta\left(\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}\right),\quad \theta^2\left(\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}\right).$$

221. *Application.* $A = 65$, $B = -142$. On a d'abord

$$\gamma^2 = \sqrt[3]{24\,389} = 29,$$

puis

$$4\alpha^3 - 87\alpha - 65 = 0;$$

d'où

$$\alpha_1 = 5,\quad \beta_1 = -2.$$

Ainsi, l'une des valeurs de $\sqrt[3]{65 - 142\sqrt{-1}}$ est

(*) Les équations (11), (12) ont toutes leurs racines réelles; mais cette circonstance est indifférente, quant à présent.

(**) L'équation $B = 3\alpha^2\beta - \beta^3$ détermine le signe de β_1.

$3 - 2\sqrt{-1}$. Les autres valeurs de ce radical sont

$$-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}-1\right)\sqrt{-1}$$

et

$$-\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)+\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}+1\right)\sqrt{-1}.$$

Résolution de l'équation $x^3+px+q=0$.

332. Quand on cherche à réduire

$$x=\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}, \qquad (13)$$

on trouve (*)

$$x^3-3\sqrt[3]{A^2-B}\,.\,x-2A=0. \qquad (14)$$

D'après cette remarque, il est naturel d'essayer de satisfaire à l'équation

$$x^3+px+q=0, \qquad (1)$$

par une valeur de la forme (13).

Identifiant les équations (1) et (14), on a

$$p=-3\sqrt[3]{A^2-B}, \quad q=-2A;$$

d'où résultent

$$A=-\frac{q}{2}, \quad B=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}. \qquad (15)$$

Par conséquent,

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \qquad (15)$$

Ce résultat est connu sous le nom de *formule de Cardan*, bien qu'il soit dû à *Tartaglia* (**).

(*) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. I, p. 44.

(**) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XV. Suivant Descartes, Cardan n'aurait pas revendiqué, pour lui-même, la découverte dont il s'agit : « ... *la règle dont Cardan attribuë l'inuention à vn nommé Scipio Ferreus...* » (*Géométrie*, édition de 1664, p. 104).

233. *Remarques.* — I. Les deux radicaux cubiques, contenus dans cette formule, admettent chacun trois valeurs. Si on les *associait* arbitrairement, on obtiendrait *neuf* valeurs différentes pour x, tandis qu'on n'en doit trouver que trois. Mais comme, en formant l'équation (14), on a supposé

$$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\,.\,\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=\sqrt[3]{A^2-B}=-\frac{p}{3},$$

on ne doit associer, parmi les valeurs des radicaux dont il s'agit, que celles dont le produit est $\left(-\frac{p}{3}\right)$. Soient R_1, R_2 deux de ces valeurs; soient, comme précédemment, θ, θ^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité : les racines de l'équation (1) seront

$$x_1=R_1+R_2,\quad x_2=R_1\theta+R_2\theta^2,\quad x_3=R_1\theta^2+R_2\theta. \quad (16)$$

II. La formule (15), prise dans toute sa généralité, résout les trois équations

$$x^3+px+q=0,\quad x^3+\theta px+q=0,\quad x^3+\theta^2 px+q=0\ (*).$$

234. *Applications.* — I. $x^3+6x-7=0$. La formule (15) donne

$$x=\sqrt[3]{\frac{7}{2}+\frac{9}{2}}+\sqrt[3]{\frac{7}{2}-\frac{9}{2}}=\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{1}.$$

On peut prendre $R_1=2$, $R_2=-1$. Donc

$$x_1=1,\quad x_2=2\theta-\theta^2=-\frac{1}{2}(1+3\sqrt{3}\sqrt{-1}),$$

$$x_3=2\theta^2-\theta=-\frac{1}{2}(1-3\sqrt{3}\sqrt{-1}).$$

(*) En multipliant les premiers membres, on obtient l'équation

$$x^9+3qx^6+(p^3+3q^2)x^3+q^3=0,$$

dont les neuf racines sont données par la formule (15).

II. $x^3 + 15x + 20 = 0$. On trouve, de la même manière,

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{225}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{225}} = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25};$$

puis, en prenant seulement les valeurs arithmétiques de ces deux derniers radicaux :

$$x_1 = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25}, \quad x_2 = \theta\sqrt[3]{5} - \theta^2\sqrt[3]{25}, \quad x_3 = \theta^2\sqrt[3]{5} - \theta\sqrt[3]{25};$$

ou

$$x_1 = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}) - \frac{1}{2}(\sqrt[6]{16\,875} + \sqrt[6]{675})\sqrt{-1},$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}) + \frac{1}{2}(\sqrt[6]{16\,875} + \sqrt[6]{675})\sqrt{-1}.$$

III. $x^3 + 5x - 18 = 0$. Cette équation est vérifiée par $x = 2$: les deux autres racines sont imaginaires. Si l'on applique la formule (15), et que l'on prenne les valeurs arithmétiques des radicaux, on a

$$2 = \sqrt[3]{9 + \sqrt{\frac{2\,312}{27}}} - \sqrt[3]{-9 + \sqrt{\frac{2\,312}{27}}}.$$

Ainsi, *le nombre entier 2 est donné sous forme irrationnelle.*

IV. Plus généralement, si, dans l'équation

$$(x - a)(x^2 + ax + b) = 0,$$

l'on suppose $b = \frac{1}{4}(a^2 + c^2)$, on est conduit à cette *identité* :

$$2a = \sqrt[3]{a(a^2+c^2) + \frac{c(9a^2+c^2)}{\sqrt{27}}} + \sqrt[3]{a(a^2+c^2) - \frac{c(9a^2+c^2)}{\sqrt{27}}}.$$

Discussion de la formule de Cardan.

225. *Premier cas* : $B > 0$, ou $4p^3 + 27q^2 > 0$. Les quantités $A + \sqrt{B}$, $A - \sqrt{B}$ sont réelles et inégales ; donc les valeurs R_1, R_2, peuvent être supposées *réelles ;* de plus, elles sont *inégales*. Il résulte alors, des formules (16), que l'équation (1) a *deux racines imaginaires*.

226. *Deuxième cas* : $B = 0$, ou $4p^3 + 27q^2 = 0$. Les valeur désignées par R_1, R_2 peuvent encore être supposées *réelles ;* mais elles sont égales ; donc

$$x_1 = 2R_1, \quad x_2 = x_3 = -R_1 \text{ (*)} :$$

l'équation (1) a *deux racines égales*.

Ces résultats s'accordent avec ce que l'on a vu ci-dessus (**224**).

227. *Troisième cas* : $B < 0$, ou $4p^3 + 27q^2 < 0$. Les binômes $A + \sqrt{B}$, $A - \sqrt{B}$ étant *imaginaires*, il en est de même pour R_1 et R_2 ; en sorte que *les valeurs des racines, données par les formules* (16), *se présentent sous forme imaginaire, précisément quand ces trois racines sont réelles*. Cette sorte de paradoxe a fait donner, au cas dont il s'agit, le nom de *cas irréductible*. On va voir comment, au moyen des fonctions circulaires, on peut alors résoudre l'équation (**).

(*) A cause de $\theta^2 + \theta = -1$.

(**) Si l'on conçoit que l'on ait mis $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}$ sous la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ (**220**), on aura, le produit R_1R_2 étant réel,

$$R_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad R_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Par suite,

$$x_1 = 2\alpha, \quad x_2 = -\left(\alpha + \beta\sqrt{3}\right), \quad x_3 = -\left(\alpha - \beta\sqrt{3}\right);$$

valeurs réelles. Malheureusement, l'équation du troisième degré qui devrait donner α ne diffère pas, au fond, de l'équation proposée.

Application de la Trigonométrie.

228. Quand l'équation

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$$

a ses trois racines réelles, on la réduit aisément à celle qui donne *le sinus du tiers d'un arc α dont le sinus est donné*, c'est-à-dire (*),

$$y^3 - \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}\sin\alpha = 0. \qquad (17)$$

En effet, posons $x = \frac{y}{k}$: l'équation (1) devient

$$y^3 + pk^2y + qk^3 = 0.$$

Identifiant avec (17), on trouve

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{p}}, \quad \sin\alpha = \frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}. \qquad (18)$$

Cette dernière formule donne une valeur réelle pour l'arc *auxiliaire* α (**); car la relation

$$4p^3 + 27q^2 < 0$$

équivaut à

$$\frac{\sqrt{q^2}}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3} < 1 \text{ (***)},$$

attendu que p est négatif.

(*) *Manuel des Candidats*, t. I, p. 262.

(**) Et même *une infinité de valeurs réelles* : les Tables trigonométriques font connaître la plus petite.

(***) Dans cette formule, $\sqrt{q^2}$ représente $+q$ ou $-q$, suivant que q est positif ou négatif.

L'arc α étant connu, on aura, pour valeurs des trois racines :

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\sin\frac{\alpha}{3},\quad x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\sin\frac{\pi-\alpha}{3}, \\ x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\sin\frac{\pi+\alpha}{3}\ (*). \end{array}\right\} \quad (19)$$

229. *Autre méthode.* — Le binôme $4p^3 + 27q^2$ étant supposé négatif, écrivons ainsi la formule (15) :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\sqrt{-1}}$$
$$+ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\sqrt{-1}}.$$

Soient (216) :

$$\rho\cos\varphi = -\frac{q}{2},\quad \rho\sin\varphi = +\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}};$$

et, par conséquent :

$$\rho = +\sqrt{-\frac{p^3}{27}},\quad \cos\varphi = -\frac{q}{2\rho},\quad \sin\varphi = +\frac{\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}{\rho}. \quad (20)$$

Le théorème de Moivre (219) donne, comme première valeur de x :

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi}{3}. \quad (21)$$

θ et θ^2 représentant toujours les racines cubiques, imagi-

(*) On peut vérifier que ces valeurs satisfont aux relations :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,\quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p,\quad x_1x_2x_3 = -q.$$

naires, de l'unité (226), les deux autres valeurs de x sont données par les formules :

$$x_2 = \sqrt[3]{\rho}\left[\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{3}\right)\theta + \left(\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{3}\right)\theta^2\right],$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\rho}\left[\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{3}\right)\theta^2 + \left(\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{3}\right)\theta\right].$$

Mais, comme il est aisé de le vérifier :

$$\theta = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}, \quad \theta^2 = \cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3};$$

donc (217)

$$x_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{2\pi+\varphi}{3}, \quad x_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{2\pi-\varphi}{3}. \qquad (22)$$

240. *Applications.* — I. Soit l'équation

$$x^3 - 41x + 39 = 0.$$

La seconde formule (18) devient

$$\sin\alpha = \frac{39}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{41}\right)^3}.$$

Le calcul prend ensuite la disposition suivante :

$$\begin{aligned}
\log 3 &= 0{,}477\,121\,3 \,+ \\
\log 41 &= 1{,}612\,783\,9 \,- \\
\hline
\log\frac{3}{41} &= \bar{2}{,}864\,337\,4 \,+ \\
\frac{1}{2} &= \bar{1}{,}432\,168\,7 \,+ \\
\log 39 &= 1{,}591\,064\,6 \,+ \\
\log 2 &= 0{,}301\,030\,0 \,- \\
\hline
\log\sin\alpha &= \bar{1}{,}585\,540\,7 \\
\alpha &= 22^\circ 42' 11'',7.
\end{aligned}$$

Calcul des racines de l'équation

$$x^3 - 41x + 39 = 0$$

$\frac{\alpha}{3} = 7°34'3'',9.$	$\frac{\pi - \alpha}{3} = 52°25'56'',1.$	$\frac{\pi + \alpha}{3} = 67°34'3'',9.$
$\log \sin \frac{\alpha}{3} = \bar{1},119\ 580\ 6\ +$	$\log \sin \frac{\pi - \alpha}{2} = \bar{1},899\ 072\ 1\ +$	$\log \sin \frac{\pi + \alpha}{3} = \bar{1},965\ 827\ 3\ +$
$\log 2 = 0,301\ 030\ 0\ +$	$0,301\ 030\ 0\ +$	$0,301\ 030\ 0\ +$
$\log \sqrt{\frac{3}{41}} = \bar{1},432\ 168\ 7\ -$	$\bar{1},432\ 168\ 7\ -$	$\bar{1},432\ 168\ 7\ -$
$\log x_1 = \bar{1},988\ 441\ 9$	$\log x_2 = 0,767\ 933\ 4$	$\log (-x_3) = 0,834\ 688\ 6$
$x_1 = 0,973\ 737.$	$x_2 = 5,860\ 480.$	$-x_3 = 6,834\ 215.$

naires, de l'unité (226), les deux autres valeurs de x sont données par les formules :

$$x_2 = \sqrt[3]{\rho}\left[\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{3}\right)\theta + \left(\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{3}\right)\theta^2\right],$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\rho}\left[\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{3}\right)\theta^2 + \left(\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{3}\right)\theta\right].$$

Mais, comme il est aisé de le vérifier :

$$\theta = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}, \quad \theta^2 = \cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3};$$

donc (217)

$$x_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{2\pi+\varphi}{3}, \quad x_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{2\pi-\varphi}{3}. \quad (22)$$

240. *Applications.* — I. Soit l'équation

$$x^3 - 41x + 39 = 0.$$

La seconde formule (18) devient

$$\sin\alpha = \frac{39}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{41}\right)^3}.$$

Le calcul prend ensuite la disposition suivante :

$$\begin{aligned}
\log 3 &= 0,477\,121\,3 \;+\\
\log 41 &= 1,612\,783\,9 \;-\\
\log\frac{3}{41} &= \bar{2},864\,337\,4 \;+\\
\frac{1}{2} &= \bar{1},432\,168\,7 \;+\\
\log 39 &= 1,591\,064\,6 \;+\\
\log 2 &= 0,301\,030\,0 \;-\\
\log\sin\alpha &= \bar{1},585\,540\,7\\
\alpha &= 22°42'11'',7.
\end{aligned}$$

Calcul des racines de l'équation

$$x^3 - 41x + 39 = 0$$

$\dfrac{\alpha}{3} = 7°34'3'',9.$	$\dfrac{\pi - \alpha}{3} = 52°25'56'',1.$	$\dfrac{\pi + \alpha}{3} = 67°34'3'',9.$
$\log \sin \dfrac{\alpha}{3} = \bar{1},119\,580\,6 +$	$\log \sin \dfrac{\pi - \alpha}{2} = \bar{1},899\,072\,1 +$	$\log \sin \dfrac{\pi + \alpha}{3} = \bar{1},965\,827\,3 +$
$\log 2 = 0,301\,030\,0 +$	$0,301\,030\,0 +$	$0,301\,030\,0 +$
$\log \sqrt{\dfrac{3}{41}} = \bar{1},432\,168\,7 -$	$\bar{1},432\,168\,7 -$	$\bar{1},432\,168\,7 -$
$\log x_1 = \bar{1},988\,441\,9$	$\log x_2 = 0,767\,933\,4$	$\log(-x_3) = 0,834\,688\,6$
$x_1 = 0,973\,737.$	$x_2 = 5,860\,480.$	$-x_3 = 6,834\,215.$

Vérification.

$$x_1 = 0,973\,737 \qquad \log x_1 = \bar{1},988\,441\,9 +$$
$$x_2 = 5,860\,480 \qquad \log x_2 = 0,767\,933\,4 +$$
$$x_3 = -6,834\,215 \qquad \log(-x_3) = 0,834\,688\,6 +$$
$$0,000\,002 \qquad \log(-x_1x_2x_3) = 1,591\,063\,9$$
$$x_1x_2x_3 = -38,999\,4.$$

II. $$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

En opérant comme dans le premier exemple, on trouve, successivement,

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27}{7}}, \quad \alpha = 79^\circ 6' 24'',0,$$

$$\frac{\alpha}{3} = 26^\circ 22' 8'', \quad \frac{\pi - \alpha}{3} = 33^\circ 37' 52'', \quad \frac{\pi + \alpha}{3} = 86^\circ 22' 8'';$$

et enfin

$$x_1 = 1,356\,896, \quad x_2 = 1,692\,021, \quad x_3 = -3,048\,917.$$

L'emploi de la seconde méthode donne

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^3}, \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{27}{7}}.$$

$$\log 7^3 = 2,535\,294\,1 + \qquad \log 27 = 1,431\,363\,8 +$$
$$\log 3^3 = 1,431\,363\,8 - \qquad \log 7 = 0,845\,098\,0 -$$
$$\bar{1},103\,930\,3 \qquad 0,586\,265\,8$$
$$\frac{1}{3} = \bar{1},701\,310\,1 \qquad \frac{1}{2} = 0,293\,132\,9 +$$
$$\log 2 = 0,301\,030\,0 -$$
$$\log(-\cos\varphi) = \bar{1},992\,102\,9$$
$$\varphi = 169^\circ 6' 24''.$$

On a ensuite :

$$x_1 = \quad 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cos 56^\circ 22'\ 8'' = \quad 1{,}692\,020,$$

$$x_2 = -2\sqrt{\frac{7}{3}}\cos \ 3^\circ 37' 52'' = -3{,}048\,916,$$

$$x_3 = \quad 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cos 63^\circ 37' 52'' = \quad 1{,}356\,896;$$

comme précédemment.

341. Dans le cas où l'équation (1) a une seule racine réelle, on peut aisément calculer, par logarithmes, les valeurs de R_1, R_2 (**333**) :

1° p étant *positif*, on prend

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{\frac{q}{2}};$$

et l'on a

$$R_1 = \sqrt[3]{q\frac{\sin^2\frac{1}{2}\theta}{\cos\theta}},\quad R_2 = -\sqrt[3]{q\frac{\cos^2\frac{1}{2}\theta}{\cos\theta}}.$$

2° p étant *négatif*, on pose

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{\frac{q}{2}};$$

valeur d'où résultent

$$R_1 = -\sqrt[3]{q\sin^2\frac{1}{2}\varphi},\quad R_2 = -\sqrt[3]{q\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\ (*).$$

(*) On peut aller plus loin, et rendre calculables, par logarithmes, $R_1 + R_2$, $(R_1 - R_2)\sqrt{3}$; mais les transformations que l'on est obligé de faire subir aux formules ci-dessus nous semblent peu utiles.

342. *Application.* $x^3 - 2x - 5 = 0.$

$$\sin\varphi = -\frac{2}{5}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3},\quad R_1 = \sqrt[3]{5\sin^2\frac{1}{2}\varphi},\quad R_2 = \sqrt[3]{5\cos^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

$$\log 2 = 0{,}301\,030\,0 +$$
$$\log 3 = 0{,}477\,121\,2 -$$
$$\bar{1}{,}823\,908\,8 +$$
$$\frac{1}{2} = \bar{1}{,}911\,954\,4 +$$
$$\log 2 = 0{,}301\,030\,0 +$$
$$\log 5 = 0{,}698\,970\,0 -$$
$$\log(-\sin\varphi) = \bar{1}{,}337\,923\,2.$$
$$\varphi = 180^\circ + 12^\circ 34' 33'',2,$$
$$\frac{1}{2}\varphi = 96^\circ 17' 16'',6.$$

$\log\sin\frac{1}{2}\varphi = \bar{1}{,}997\,379\,4$	$\log\left(-\cos\frac{1}{2}\varphi\right) = \bar{1}{,}039\,514\,0$
$\times 2 = \bar{1}{,}994\,758\,8 +$	$\times 2 = \bar{2}{,}079\,028\,0 +$
$\log 5 = 0{,}698\,970\,0 +$	$\log 5 = 0{,}698\,970\,0 +$
$0{,}693\,728\,8$	$\bar{2}{,}777\,998\,0$
$\frac{1}{3} = \log R_1 = 0{,}231\,242\,9$	$\frac{1}{3} = \log R_2 = \bar{1}{,}592\,666\,0$
$R_1 = 1{,}703\,110,$	$R_2 = 0{,}391\,441.$
$R_1 + R_2 = 2{,}094\,551,$	$R_1 - R_2 = 1{,}311\,669.$

$$x_1 = 2{,}094\,551,\quad x_2 = -1{,}047\,275 + 0{,}655\,834\sqrt{3}\sqrt{-1},$$
$$x_3 = -1{,}047\,275 - 0{,}655\,834\sqrt{3}\sqrt{-1}.$$

Équation du quatrième degré.

343. Pour résoudre l'équation

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0, \qquad (1)$$

à coefficients réels, posons

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = (x^2 + px + q)(x^2 - px + q') :$$

nous devrons trouver, pour les inconnues p, q, q', *au moins un système de valeurs réelles* (**225**).

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x, dans les deux membres, nous obtenons

$$q' + q = A + p^2, \quad q' - q = \frac{B}{p}, \quad qq' = C;$$

puis, en éliminant q et q',

$$(A + p^2)^2 - \frac{B^2}{p^2} = 4C. \tag{2}$$

Soit

$$A + p^2 = z; \tag{3}$$

l'équation (2) devient

$$z^3 - Az^2 - 4Cz - (B^2 - 4AC) = 0. \tag{4}$$

Cette équation auxiliaire, du troisième degré, est ce que l'on appelle la *réduite* de la proposée.

244. D'après la relation (3), *l'équation* (4) *a au moins une racine plus grande que* A (*). Si l'on désigne par γ cette racine, on trouve

$$p = \sqrt{\gamma - A}, \quad q' = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{B}{p}\right), \quad q = \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{B}{p}\right). \tag{5}$$

245. *Application.* — Soit

$$x^4 + x^2 + 8x - 15 = 0.$$

La réduite est

$$z^3 - z^2 + 60z - 124 = 0.$$

Celle-ci donne $\gamma = 2$. Donc, par les formules (5) :

$$p = 1, \quad q' = 5, \quad q = -3;$$

(*) En général, elle en a un nombre impair.

et enfin

$$x^4 + x^2 + 8x - 15 = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 5).$$

246. *Remarque.* — Lorsque la réduite (4) a trois racines réelles, plus grandes que A, la proposée (1) a toutes ses racines réelles. Mais alors la formule de Cardan devient illusoire (**237**); et les valeurs de p, q, q' ne peuvent être exprimées, sous forme réelle, en fonction des coefficients A, B, C. Il en est de même si la réduite a ses racines réelles, mais non supérieures, toutes trois, à A. C'est donc seulement quand l'équation (4) a une seule racine réelle que la formule de Cardan peut être appliquée utilement à la résolution de l'équation (1). Ce cas est celui où les coefficients A, B, C satisfont à la condition

$$-16(A^2 - 4C)^2C + 4AB^2(A^2 - 36C) + 27B^4 > 0 \text{ (*)}.$$

Exercices.

I. Résoudre complètement

$$x^9 + x^7 + 3x^6 + x^5 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

II. Dans quel cas les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ ont-elles la forme $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, A et B étant rationnels?

Réponse : Lorsque $q = \frac{p^3}{27m} - m$, m étant rationnel.

III. A une sphère donnée, inscrire un cône dont la surface totale soit la moitié de celle de la sphère. Calculer, avec six décimales exactes, le rayon de la base et la hauteur du cône, le rayon de la sphère étant pris pour unité.

IV. a, b, c étant les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$, former l'équation qui a pour racines $a + \frac{1}{a}$, $b + \frac{1}{b}$, $c + \frac{1}{c}$.

(*) Il est sous-entendu que l'équation (1) n'a pas de racines égales.

Résultat :

$$qy^3 + py^2 + (p - 3)\,qy + (p - 1)^2 + q^2 = 0.$$

V. A quoi est égale la somme des valeurs que prend la fraction $\frac{y+1}{y^2+1}$, quand on y remplace la variable y, successivement, par les trois racines de l'équation $x^3+px+q=0$?

VI. a, b, c étant les racines de $x^3+px+q=0$, former l'équation qui aurait pour racines,

$$\frac{a+1}{a^2+1},\quad \frac{b+1}{b^2+1},\quad \frac{c+1}{c^2+1}.$$

VII. Résoudre complètement l'équation

$$209x^4 - 232x^3 + 93x^2 - 16x + 1 = 0.$$

Résultat :

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{38},\quad x = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{22}.$$

VIII. Décomposer, en facteurs réels du second degré,

$$y = (x^2 + 2ax + b)^2 + 4c^2x^2.$$

Résultat : Si l'on fait

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2 - c^2 - b + \sqrt{(a^2 - c^2 - b)^2 + 4a^2c^2}}{2}},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{-a^2 + c^2 + b + \sqrt{(a^2 - c^2 - b)^2 + 4a^2c^2}}{2}},$$

on a

$$y = \left[(x - \alpha + a)^2 + (\beta - c)^2\right]\left[(x + \alpha + a)^2 + (\beta + c)^2\right].$$

IX. Comment doit-on prendre B, pour que l'équation

$$x^4 + x^2 + Bx + 1 = 0.$$

ait deux racines égales?

Réponse :

$$B = \pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{35 + 13\sqrt{13}}{6}}.$$

La valeur de la racine double est

$$\mp\sqrt{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}}\ (*).$$

Celle-ci suggère le problème suivant :

Décomposer $(A+\sqrt{B})^2$ *en* $(x+y\sqrt{B})(x'+y'\sqrt{B})$.

X. Théorème. — *Si* $3pa^2+9qa-p^2=0$, *les racines de l'équation* $x^3+px+q=0$ *sont données par la formule*

$$x=\sqrt[3]{\frac{ap}{3}}-\sqrt[3]{\frac{p^2}{9a}}.$$

(Le Besgue.)

XI. Théorème. — *Si les quantités rationnelles* a^2, b^2, $2ab$ *sont racines d'une équation du troisième degré, l'équation dérivée a ses racines rationnelles.* (Prouhet.)

CHAPITRE XXI.

ÉQUATIONS RÉCIPROQUES (**).

Conditions pour qu'une équation soit réciproque.

347. On dit qu'une équation $f(x)=0$ est *réciproque*, lorsqu'elle a ses racines réciproques ou *inverses* deux à deux : l'équation

$$(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$$

est réciproque.

(*) En calculant B de deux manières, on trouve l'*identité* :

$$(11+\sqrt{13})^2=(33+13\sqrt{13})(-1+\sqrt{13}).$$

(**) La théorie des équations réciproques est attribuée à Reynaud (Antoine-André), élève, répétiteur et enfin examinateur à l'École polytechnique; né en 1777, décédé vers 1852.

D'après la définition, la *transformée en* $\frac{1}{x}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, admet les mêmes racines que la proposée. Ces deux équations, étant ramenées à la forme

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^m + \cdots + A_m = 0,$$

leurs premiers membres doivent être des polynômes *identiques*, c'est-à-dire dans lesquels les coefficients des mêmes puissances de x soient respectivement égaux. Cette simple remarque permet, comme on va le voir, de trouver les conditions cherchées.

248. Supposons d'abord que l'équation soit de degré *impair;* et, pour fixer les idées, prenons

$$f(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

La transformée en $\frac{1}{x}$ devient, après multiplication par x^5 et division par E :

$$x^5 + \frac{D}{E}x^4 + \frac{C}{E}x^3 + \frac{B}{E}x^2 + \frac{A}{E}x + \frac{1}{E} = 0.$$

On doit avoir

$$\frac{D}{E} = A, \quad \frac{C}{E} = B, \quad \frac{B}{E} = C, \quad \frac{A}{E} = D, \quad \frac{1}{E} = E;$$

relations d'où l'on tire :

$$E = \pm 1, \quad D = \pm A, \quad C = \pm B;$$

en sorte que l'équation donnée a l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0, \qquad (1)$$

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 - Bx^2 - Ax - 1 = 0. \qquad (2)$$

Ainsi, *une équation de degré impair est réciproque, si les coefficients des termes à égale distance des extrêmes sont égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires* (*).

(*) Les conditions trouvées, *nécessaires*, sont évidemment *suffisantes*.

249. Le même calcul, appliqué à une équation de degré *pair* :

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0,$$

prouve qu'elle doit se réduire à une des deux formes :

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0, \quad (3)$$
$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 - Bx^2 - Ax - 1 = 0. \quad (4)$$

Conséquemment, *une équation de degré pair est réciproque, si les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires; mais, dans ce second cas, il n'y a pas de terme du milieu* (*).

250. Les premiers membres des équations (1), (2), (4) sont respectivement divisibles par $x+1$, $x-1$, x^2-1. Supprimant ces facteurs, on trouve

$$x^4 + (A-1)x^3 + (B-A+1)x^2 + (A-1)x + 1 = 0,$$
$$x^4 + (A+1)x^3 + (B+A+1)x^2 + (A+1)x + 1 = 0,$$
$$x^4 + Ax^3 + (B+1)x^2 + Ax + 1 = 0;$$

équations de même forme que (3). Par conséquent, *toute équation réciproque est réductible à une équation réciproque de degré pair, dans laquelle les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux et de même signe.* La forme *normale* des équations réciproques est donc

$$x^{2n} + A_1x^{2n-1} + A_2x^{2n-2} + \dots + A_nx^n + \dots + A_2x^2 + A_1x + 1 = 0. \quad (5)$$

Abaissement des équations réciproques.

251. Quand on ramène la résolution d'une équation, à la résolution d'une équation de degré inférieur au sien, on

(*) En effet, la condition $C = -C$ donne $C = 0$.

dit que l'on opère l'*abaissement* de la proposée (*). On a vu, dans la théorie des racines égales, et dans la résolution de l'équation du quatrième degré, des exemples d'abaissement d'équations.

En général, une équation $f(x)=0$ est susceptible d'abaissement, quand on connaît quelque relation particulière entre deux ou plusieurs de ses racines. Soit, par exemple, $\varphi(a,b)=0$ cette relation. Comme on a aussi $f(a)=0$, si l'on peut éliminer b, on trouvera une équation telle que $F(a)=0$. Autrement dit, on détermine la racine désignée par a en égalant à zéro le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $F(x)$ (**207**); etc. Appliquons ces généralités à l'équation (5).

252. Le produit de deux racines conjuguées étant 1, il est naturel de prendre, pour *inconnue auxiliaire*, la somme correspondante. Soit donc

$$x+\frac{1}{x}=z: \tag{6}$$

le nombre des valeurs de z doit être moitié de celui des valeurs de x, c'est-à-dire n. Par conséquent, la *réduite* de l'équation (5), ou la transformée en z, sera du degré n. On forme assez simplement cette transformée, si l'on écrit ainsi la proposée :

$$(x^n+x^{-n})+A_1(x^{n-1}+x^{-n+1})+A_2(x^{n-2}+x^{-n+2})+\cdots+A_n=0. \tag{7}$$

253. Soit en effet

$$x^p+x^{-p}=Z_p, \tag{8}$$

Z_p étant une fonction de z, qu'il s'agit de calculer.

Les égalités (6), (8) donnent, par multiplication,

$$(x^{p+1}+x^{-p-1})+(x^{p-1}+x^{-p+1})=Z_p z;$$

(*) Ou plutôt, l'*abaissement* du degré de cette équation.

ou plutôt

$$Z_{p+1} = Z_p z - Z_{p-1}. \qquad (9)$$

Les polynômes $Z_0 = 2$, $Z_1 = z$, Z_2, ..., Z_{p-1}, Z_p, Z_{p+1}, ... *forment* donc *une suite récurrente, dans laquelle un terme quelconque est égal à la somme des deux précédents, respectivement multipliés par* z *et par* (-1) (*). De plus, à cause du multiplicateur z et des valeurs de Z_0, Z_1, *le polynôme* Z_{p+1} *est du degré* $p+1$: en particulier, Z_n renferme z^n ; ce qui devait être (**252**).

Si l'on peut résoudre la transformée en z, laquelle a la forme

$$z^n + B_1 z^{n-1} + B_2 z^{n-2} + \cdots + B_n = 0,$$

on trouvera les valeurs de x, correspondant à celles de z, au moyen de l'équation (6). Celle-ci donne, en effet,

$$x = \frac{1}{2}\left[z \pm \sqrt{z^2 - 4}\right]. \qquad (10)$$

254. *Application :*

$$x^8 - 3x^7 + 9x^6 - 13x^5 + 18x^4 - 13x^3 + 9x^2 - 3x + 1 = 0;$$

ou

$$Z_4 - 3Z_3 + 9Z_2 - 13Z_1 + 18 = 0.$$

La formule (9) donne, successivement :

$$Z_2 = z^2 - 2, \quad Z_3 = z^3 - 3z, \quad Z_4 = z^4 - 4z^2 + 2.$$

La transformée en z est donc

$$z^4 - 4z^2 + 2 - 3(z^3 - 3z) + 9(z^2 - 2) - 13z + 18 = 0,$$

ou

$$z^4 - 3z^3 + 5z^2 - 4z + 2 = 0.$$

(*) Cette loi est celle qui régit *les cosinus des multiples du plus petit arc de la Table.* (B., TRIG., 33.)

Par un procédé analogue à celui qui a été exposé ci-dessus (**342**), on décompose le premier membre en

$$(z^2 - z + 1)(z^2 - 2z + 2).$$

Ainsi

$$z = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}), \quad z = 1 \pm \sqrt{-1};$$

puis, en vertu de la formule (10) :

$$x = \frac{1}{4}\left[1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1} \pm \sqrt{-18 \pm 2\sqrt{3}\sqrt{-1}}\right],$$

$$x = \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{-1} \pm \sqrt{-4 \pm 2\sqrt{-1}}\right];$$

etc.

Exercices.

I. Résoudre l'équation

$$70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1 = 0,$$

sachant que si α est racine, $1 - \alpha$ l'est également.

II. Même question pour

$$1716x^6 - 5148x^5 + 5724x^4 - 2904x^3 + 648x^2 - 54x + 1 = 0.$$

III. Résoudre complètement

$$[(x^2 + 2)^2 + x^2]^3 = 8x^4(x + 2)^2 \text{ (*)}.$$

IV. Discuter l'équation

$$1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} - (n + 1)x^n = 0.$$

V. Résoudre complètement

$$x^{10} + x^8 + x^6 - 6x^5 + x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

(*) Si l'on pose $x + 1 = y$, on est conduit à l'équation réciproque

$$(y + y^{-1})^3 = (y^2 + y^{-2} - 2)^2 (y + y^{-1} - 2).$$

(*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XXV, p. 279.)

CHAPITRE XXII.

ÉQUATIONS BINÔMES.

Racines d'une quantité quelconque.

255. Les équations *binômes* sont celles qui ont la forme

$$y^m \pm A = 0, \tag{1}$$

A étant une quantité donnée, positive pour plus de simplicité (*). Les m racines, ou *les* m *valeurs de* $\sqrt[m]{\pm A}$, *sont inégales;* car le premier membre et sa dérivée sont premiers entre eux.

256. Si l'on remplace y par ax, a désignant la *valeur arithmétique* de $\sqrt[m]{A}$, l'équation (1) devient

$$x^m \pm 1 = 0. \tag{2}$$

Par conséquent, *toute quantité réelle,* $\pm A$, *a* m *racines* m^{ièmes}, *que l'on obtient en multipliant, par la valeur arithmétique de* $\sqrt[m]{A}$, *les* m *racines* m^{ièmes} *de* ± 1 (**228**).

257. Avant d'aller plus loin, il convient de distinguer les cas de *m pair* et de *m impair :*

1° Si m est *pair,* l'équation $x^m - 1 = 0$ se décompose en $x^{\frac{m}{2}} - 1 = 0$, $x^{\frac{m}{2}} + 1 = 0$;

2° Si m est *impair,* l'équation $x^m + 1 = 0$ a, pour transformée en $-x$, $x^m - 1 = 0$.

(*) On peut même supposer que A soit imaginaire (**229**). Pour abréger, nous faisons abstraction de ce cas.

Ainsi, l'équation (2) est réductible aux deux formes suivantes :

$$x^m + 1 = 0, \quad \text{m } pair; \qquad (3)$$

$$x^m - 1 = 0, \quad \text{m } impair. \qquad (4)$$

De plus, l'équation (3) est réductible au degré $\frac{m}{2}$ (252); et l'équation (4), au degré $\frac{m-1}{2}$ (250).

Racines de l'unité.

258. Considérons spécialement l'équation (4). L'application du Théorème de Descartes montre qu'elle a une seule racine réelle, laquelle est 1; résultat évident *a priori*. Les $m - 1$ racines imaginaires jouissent de propriétés remarquables : nous allons en indiquer quelques-unes.

259. Théorème I. — *Toute puissance d'une racine de l'unité est aussi racine de l'unité.*

Soit α une racine imaginaire de l'équation (4); de manière que $\alpha^m = 1$. Élevant les deux membres à une puissance quelconque, on a $(\alpha^m)^k = 1$, ou $(\alpha^k)^m = 1$; donc α^k est une valeur de $\sqrt[m]{1}$. En particulier, tous les termes de la progression

$$\alpha, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \alpha^4, \ldots \qquad (5)$$

sont des valeurs de ce radical.

260. *Remarque.* — A cause de $\alpha^{m+1} = \alpha^m . \alpha = \alpha$, *la série est périodique : la période contient, au plus,* m *termes;* ce qui devait être.

261. Lemme. — *Le plus grand commun diviseur des binômes* $x^m - 1$, $x^{m'} - 1$, *est* $x^\Delta - 1$, Δ *étant le plus grand commun diviseur des exposants* m, m'.

Si l'on divise le premier binôme par le second (*), on

(*) En supposant $m > m'$.

trouve, pour quotient, $x^{m-m'}+x^{m-2m'}+\ldots+x^{m-qm'}$; qm' désignant, bien entendu, le plus grand multiple de m' contenu dans m. Le reste de la division est donc $x^{m-qm'}-1$, ou, pour plus de simplicité, $x^{m''}-1$. Sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, on voit que si m'', m''', ..., Δ sont les restes successifs provenant de la recherche du plus grand commun diviseur entre m et m', l'opération analogue, effectuée sur x^m-1, $x^{m'}-1$, donne les restes $x^{m''}-1$, $x^{m'''}-1$, ..., $x^{\Delta}-1$. Ce dernier binôme est donc le plus grand commun diviseur demandé.

362. Théorème II. — *Si l'indice* m *est premier, les puissances successives d'une racine imaginaire quelconque de l'unité sont égales à toutes les racines de l'unité;* ou, ce qui est équivalent : *si* m *est un nombre premier, et que* α *soit une racine imaginaire de l'équation* $x^m-1=0$, *les* m *racines de cette équation sont* α, α^2, α^3, ... α^m.

Soit, s'il est possible, $\alpha^g=\alpha^h$, g et h étant plus petits que m. Cette égalité devient $\alpha^{g-h}-1=0$; ou, en faisant $g-h=m'$: $\alpha^{m'}-1=0$. Par suite, α serait une racine commune aux équations $x^m-1=0$, $x^{m'}-1=0$. Et comme le plus grand commun diviseur entre m et m' est 1, on aurait, par le lemme précédent, $\alpha=1$.

363. *Racines primitives.* — On donne ce nom aux racines qui, par leurs puissances successives, reproduisent toutes les racines. Le Théorème II consiste en ce que, m *étant premier, toutes les racines* m[ièmes] *de l'unité* (excepté 1) *sont primitives.* Quand m est quelconque, certaines racines sont primitives, et les autres sont *non primitives* (*).

(*) Le lecteur peut consulter, pour cette théorie, la *Résolution des équations numériques*, par Lagrange (note XIV).

Résolution de quelques équations binômes.

264. PREMIER EXEMPLE :

$$x^6 + 1 = 0.$$

En opérant comme pour l'équation bicarrée (**214**), on décompose le premier membre en

$$(x^4 + x^2\sqrt{2} + 1)(x^4 - x^2\sqrt{2} + 1).$$

Semblablement,

$$x^4+x^2\sqrt{2}+1=\left(x^2+x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1\right),$$
$$x^4+x^2\sqrt{2}+1=\left(x^2+x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1\right);$$

en sorte que la proposée est remplacée par quatre équations du second degré.

265. DEUXIÈME EXEMPLE :

$$x^{12} + 1 = 0.$$

A cause de $x^{12} = (x^4)^3$, le premier membre est divisible par $x^4 + 1$. Le quotient, $x^8 - x^4 + 1$, égale

$$(x^4 + x^2\sqrt{3} + 1)(x^4 - x^2\sqrt{3} + 1).$$

La question peut donc être regardée comme résolue.

266. TROISIÈME EXEMPLE :

$$x^{15} - 1 = 0.$$

Le premier membre est divisible par $x^3 - 1$ et par $x^5 - 1$. Effectuant, on trouve

$$x^{15}-1=(x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)=(x^5-1)(x^{10}+x^5+1);$$

et, par conséquent,

$$(x^2+x+1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{10}+x^5+1).$$

Le second membre de cette *identité* est divisible par x^2+x+1. D'ailleurs, ce trinôme est premier avec $x^4+x^3+x^2+x+1$ (**281**); donc ce même trinôme doit diviser $x^{10}+x^5+1$ (*). En effet,

$$x^{10}+x^5+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1).$$

De même,

$$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1).$$

La proposée est donc remplacée par les équations suivantes :

$$x-1=0,\quad x^2+x+1=0,\quad x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$
$$x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1=0.$$

Les deux dernières sont réductibles, respectivement, à

$$z^2+z-1=0,\quad z^4-z^3-4z^2+4z+1=0.$$

Ainsi, des *quinze* racines de l'équation donnée, *sept* sont exprimables sous forme finie.

287. Quatrième exemple :

$$x^7-1=0.$$

Cette équation se ramène d'abord, après la suppression du facteur $x-1$, à

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Celle-ci a la forme normale des équations réciproques (**250**). Posant $x+\frac{1}{x}=z$, on trouve

$$z^3+z^2-2z-1=0.$$

(*) Théorème. — *Toute quantité entière, qui divise un produit de deux facteurs entiers, et qui est première avec l'un d'eux, divise l'autre.*

Il resterait donc à résoudre, par les méthodes connues (**222**, **228**), cette équation du troisième degré. On va voir que l'application du Théorème de Moivre (**219**) conduit plus simplement au but.

Résolution trigonométrique des équations binômes.

268. Soit d'abord

$$x^m + 1 = 0, \qquad (3)$$

l'exposant étant *pair*. Comme le module du terme connu est 1, on peut supposer

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi;$$

d'où résulte (**219**)

$$\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi = -1.$$

Cette équation exige que $m\varphi = (2k+1)\pi$, k désignant un entier quelconque, positif ou négatif. Les valeurs des racines sont donc déterminées par la formule

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{m}. \qquad (6)$$

269. *Remarques.* — I. En attribuant m valeurs *consécutives* à l'entier k, par exemple, $0, 1, \ldots (m-1)$, *on obtient toutes les racines de l'équation* (3). En effet, les arcs représentés par $\frac{\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \frac{5\pi}{m}, \frac{(2m-1)\pi}{m}$ sont moindres qu'une circonférence; donc deux quelconques d'entre eux n'ont pas, à la fois, même sinus et même cosinus.

II. Si l'on donnait à k des valeurs différentes des premières, on retomberait sur des racines déjà trouvées. Ainsi, $k = m$ donne $x = \cos\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{m}$. De même, pour

$$k = m + 1, \quad x = \cos\frac{3\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{m};$$

etc. (*).

III. *Les valeurs de* x, *répondant à deux valeurs de* k *dont la somme est* m — 1, *sont conjuguées.* Cette proposition se vérifie aussi simplement que la précédente. Elle prouve que l'*on obtient toutes les racines de l'équation* (3) *au moyen de la formule*

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{m}, \qquad (7)$$

pourvu que l'on attribue $\left(\frac{m}{2}\right)$ *valeurs consécutives à* k.

270. Considérons maintenant l'équation

$$x^m - 1 = 0, \qquad (4)$$

dans laquelle m est *impair*. Si l'on met à part, pour ainsi dire, la racine réelle 1, on prouve, par des raisonnements semblables à ceux que nous venons d'employer, que les $(m-1)$ racines imaginaires sont données par la formule

$$x = \cos\frac{2k\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi m}{m}, \qquad (8)$$

dans laquelle $k = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$.

Facteurs trinômes de $x^m \pm 1$.

271. La décomposition de $x^m \pm 1$, en *facteurs réels du second degré* (**235**), est une conséquence de ce qui précède. En effet, les formules (7), (8) représentent, respectivement, les racines des équations

$$x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{m} + 1 = 0, \quad x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{m} + 1 = 0.$$

(*) Cette proposition est évidente *a priori*, l'équation (3) ne pouvant avoir plus de m racines.

Donc, si m est *pair*,

$$x^m + 1 = \left[x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{m} + 1\right]\left[x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{m} + 1\right]\dots$$

$$\dots\dots\left[x^2 - 2x\cos\frac{(m-1)\pi}{m} + 1\right]; \qquad (9)$$

et, si m est *impair*,

$$x^m - 1 = (x-1)\left[x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{m} + 1\right]\left[x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{m} + 1\right]\dots$$

$$\dots\dots\left[x^2 - 2x\cos\frac{(m-1)\pi}{m} + 1\right]. \qquad (10)$$

272. *Application.* — Nous prendrons seulement l'équation

$$x^7 - 1 = 0,$$

déjà traitée (**267**). La formule (10) donne, après suppression du facteur $x - 1$:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 =$$

$$\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{7} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{7} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{6\pi}{7} + 1\right).$$

Malheureusement, les cosinus qui entrent dans cette égalité ne sont pas calculables sous forme finie (*).

Exercices.

I. Résoudre, par la Trigonométrie, les équations

$$x^{12} + 1 = 0,\quad x^{18} + 1 = 0,\quad x^{10} + 1 = 0,\quad x^{15} - 1 = 0.$$

II. Réduire, au huitième degré, l'équation $x^{17} - 1 = 0$.

(*) Il en résulte que *l'on ne peut, au moyen de la règle et du compas, inscrire, à un cercle donné, un heptagone régulier.*

III. Former l'équation qui a pour racines

$$y_1 = 2\left[\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} + \cos\frac{16\pi}{17}\right],$$

$$y_2 = 2\left[\cos\frac{6\pi}{17} + \cos\frac{10\pi}{17} + \cos\frac{12\pi}{17} + \cos\frac{14\pi}{17}\right].$$

Résultat :

$$y^2 + y - 4 = 0 \ (*).$$

IV. 1° Les fonctions $Z_1, Z_2, \ldots$ (258) sont données par la formule

$$Z_p = \frac{1}{2^{p-1}}\left[z^p + \frac{p(p-1)}{1.2} z^{p-2}(z^2-4) + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4} z^{p-4}(z^2-4)^2 + \cdots\right].$$

2° Toutes les racines de l'équation $Z_n = 0$, sont comprises entre $+2$ et -2. On peut donc les représenter, chacune, par $z = 2\cos\omega$.

3° En vertu de cette remarque,

$$Z_p = 2\cos p\omega \ (**).$$

V. $$\frac{1+x^7+x^{14}+x^{21}+x^{28}}{1+x+x^2+x^3+x^4} = \frac{1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}+x^{25}+x^{30}}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6} = 1-x+x^5-x^6+x^7-x^8+x^{10}-x^{11}+x^{12}-x^{13}+x^{14}-x^{16}+x^{17} -x^{18}+x^{19}-x^{23}+x^{24}.$$

VI. Les *réduites* de l'équation $x^{35} - 1 = 0$ sont

$$z^2 + z - 1 = 0, \quad z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0,$$

$$z^{12} - z^{11} - 12z^{10} + 11z^9 + 54z^8 - 45z^7 - 113z^6 + 71z^5 + 110z^4 - 46z^3 - 40z^2 + 8z + 1 = 0 \ (***).$$

(*) Les deux dernières questions se rapportent à la *division de la circonférence en dix-sept parties égales*. On peut consulter, sur ce point, la *Trigonométrie* de Legendre, et les *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*.

(**) Voir la note de la page 181.

(***) *Remarques sur l'équation* $x^m - 1 = 0$. (*Bulletins de l'Académie de Belgique*. — Mars 1870.)

VII. Théorèmes. — *Quelle que soit la base* b *du système de numération :*

1° p, q *étant deux nombres impairs, premiers entre eux,*

$$\frac{b^{(q-1)p}+b^{(q-2)p}+\dots+b^p+1}{b^{q-1}+b^{q-2}+\dots+b+1}=\frac{b^{(p-1)q}+b^{(p-2)q}+\dots+b^q+1}{b^{p-1}+b^{p-2}+\dots+b+1}$$

= entier.

Par exemple :

$$\frac{1\,001\,001\,001\,001}{11\,111}=\frac{10\,000\,100\,001}{111}=\text{entier}.$$

2° *Le plus grand commun diviseur entre deux nombres de la forme* 111 ... 11, *a cette même forme.*

3° *Les nombres*

1, 11, 111, 11111, 1111111, 11111111111, ...

composés de un, deux, trois, cinq, sept, onze, ... chiffres, sont premiers entre eux, deux à deux.

CHAPITRE XXIII.

RECHERCHE DES RACINES INCOMMENSURABLES.

272. On a vu, précédemment, comment on peut déterminer les racines commensurables d'une équation à coefficients rationnels, et comment la résolution d'une équation qui a des racines égales peut être ramenée à la résolution d'équations plus simples. Nous supposerons donc, dans ce qui va suivre, que l'équation donnée n'a aucune racine

commensurable, ni aucune racine multiple : les racines de cette équation seront donc, ou incommensurables, ou imaginaires; mais nous ne nous occuperons pas de ces dernières.

La recherche des racines incommensurables d'une équation $f(x)=0$ se décompose en deux parties : 1° la *séparation des racines;* 2° le *calcul des racines.*

Séparation des racines.

274. Les racines sont dites *séparées,* quand *chacune d'elles est comprise entre deux quantités connues, qui n'en comprennent aucune autre.*

Pour essayer d'effectuer cette séparation, on peut d'abord procéder comme il suit :

Ayant déterminé une limite inférieure et une limite supérieure des racines, on substitue, dans $f(x)$, les quantités entières comprises entre ces deux limites (*), et l'on compte le nombre des variations de signes que présente la *suite* formée par les résultats de ces substitutions. *S'il arrive* que ce nombre soit égal à la limite supérieure du nombre des racines réelles, donnée par le Théorème de Descartes, les racines seront séparées.

Soit, par exemple,

$$x^4 + 10x^3 - 15x + 1 = 0.$$

Par la *Règle des signes,* on reconnaît que cette équation n'a aucune racine négative, et qu'*elle peut avoir* deux racines positives. D'ailleurs, $+2$ est une limite supérieure des

(*) Quand ces limites sont fort écartées, le nombre des substitutions *inutiles* peut devenir très-grand. Pour abréger, on se contente, au moins dans un premier essai, de substituer....... -100, -10, -1, 0, $+1$, $+10$, $+100$, ..., après quoi l'on resserre les intervalles.

racines; et, si l'on désigne par y le premier membre, on trouve, pour

$$x = 0, \quad 1, \quad 2;$$
$$y = 1, \quad -3, \quad 27.$$

La suite des valeurs de y présentant *deux* variations, les racines sont séparées : l'une est comprise entre 0 et 1, l'autre entre 1 et 2.

275. Il est très-rare que le procédé dont nous venons de faire une application permette d'effectuer la séparation des racines d'une équation donnée. Dans la plupart des cas, le nombre des variations que présente la suite des valeurs de $f(x)$, est inférieur à la limite du nombre des racines, donnée par le Théorème de Descartes. Il est vrai que si l'on attribue à x des valeurs en progression, dont la différence constante soit d'abord 0,1, puis 0,01, puis 0,001, etc., la *probabilité* que les racines finiront par se séparer augmente à chaque *série de substitutions*. Mais, d'une part, les calculs auxquels on serait conduit ainsi peuvent devenir fort prolixes; et, d'un autre côté, si l'équation a des racines imaginaires dont l'existence n'ait pas été indiquée par le Théorème de Descartes; ces calculs, qu'il n'y a aucune raison de ne pas continuer *indéfiniment*, auront été effectués en *pure perte* (*). Nous expliquerons, bientôt, un moyen plus expéditif et plus sûr d'opérer la séparation des racines.

Calcul des racines.

276. *Méthode de Newton.* — Supposons que, par un procédé quelconque, ont ait trouvé une valeur *approchée* α

(*) Le Théorème de Sturm n'a pas les inconvénients de ce procédé vague, appelé quelquefois *méthode des substitutions*, puisqu'il indique, à chaque instant, *le nombre* et *le lieu* des racines réelles.

d'une racine réelle de l'équation $f(x)=0$. Désignons par a cette racine, et par h la correction, positive ou négative, que l'on doit faire subir à α pour obtenir a. Nous aurons

$$a=\alpha+h, \quad f(\alpha+h)=0,$$

c'est-à-dire

$$f(\alpha)+hf'(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}f''(\alpha)+\cdots+\frac{h^m}{1.2\ldots m}f^{(m)}(\alpha)=0,$$

m étant le degré de l'équation.

Cela posé, *si la quantité* h *est suffisamment petite,* les termes en $h^2, h^3, \ldots, h^m$ seront ordinairement très-petits par rapport aux deux premiers termes : la *méthode de Newton* consiste à négliger complètement ces puissances supérieures de h, et à remplacer l'équation précédente par celle-ci :

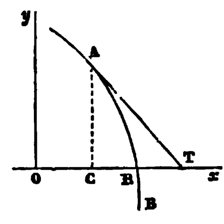
$$f(\alpha)+hf'(\alpha)=0;$$

d'où l'on conclut

$$h=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}. \qquad (1)$$

Telle est la formule de Newton.

277. *Interprétation géométrique.* — Soit AB un arc de la courbe représentée par $y=f(x)$, et soit R le point inconnu où elle coupe l'axe Ox : la distance OR représente la racine inconnue a.



Au point A, qui a pour abscisse la valeur approchée $\alpha=$ OC, menons la tangente AT. Dans le triangle rectangle ACT,

$$\text{CT}=\frac{\text{AC}}{\text{tg ATC}}.$$

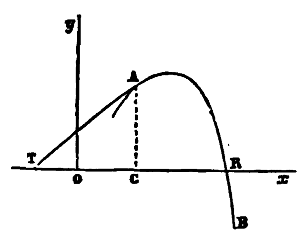
Mais

$$\text{AC}=f(\alpha), \quad \text{tg ATC}=-\text{tg AT}x=-f'(\alpha);$$

donc
$$CT = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Cette valeur étant égale à celle de h, donnée par la formule (1), il s'ensuit que la *méthode de Newton consiste à remplacer la courbe par sa tangente, au point dont l'abscisse est α.*

Cette remarque fait voir que, dans certains cas, la méthode de Newton pourra être complètement fautive. Par exemple, si l'arc AB a la forme indiquée ci-contre, et qu'on mène la tangente au point A, *on s'éloigne de la racine, au lieu de s'en rapprocher.*



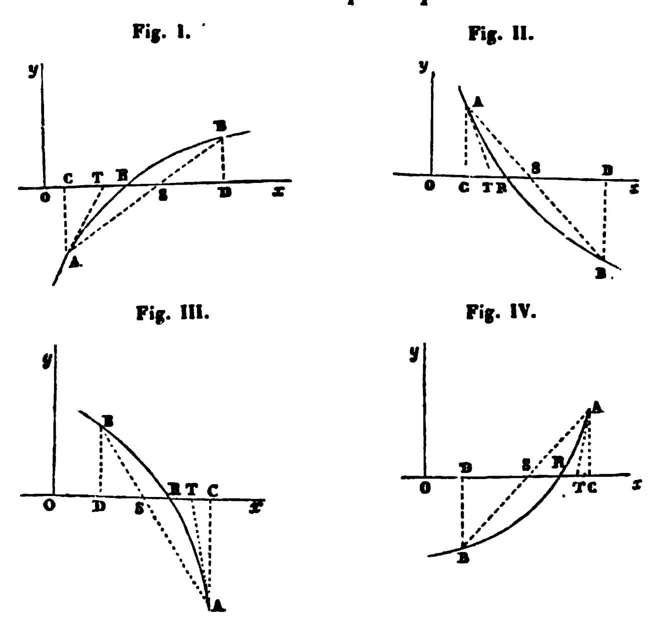
278. *Rectification de la méthode de Newton.* — Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que la séparation des racines a été opérée, en sorte que la racine inconnue a, dont on veut approcher, est comprise entre deux quantités données α, β, qui ne comprennent aucune autre racine de l'équation $f(x)=0$. Nous admettrons, en outre, qu'il n'existe, entre ces deux limites, aucune racine, soit de $f'(x)=0$ (*), soit de $f''(x)=0$. Ces diverses hypothèses peuvent être énoncées ainsi :

L'arc AB, *dont les extrémités ont pour abscisses α et β, coupe une seule fois l'axe des abscisses; de plus, il ne contient ni point maximum* (**) *ou minimum, ni point d'inflexion.*

(*) Cette première condition n'est pas absolument indispensable au succès de la méthode; mais, quand elle est vérifiée, les calculs marchent plus rapidement.

(**) *Point maximum*, c'est-à-dire *point dont l'ordonnée est un maximum.* On peut lire, dans le *Calcul différentiel*, la théorie des *points d'inflexion*; quant à présent, nous nous contenterons de les définir par cette propriété : *en chaque point d'inflexion d'une courbe, le coefficient angulaire de la tangente devient maximum ou minimum.*

Cela posé : 1° appliquons la correction de Newton à celui des deux points donnés pour lequel *la tangente tombe dans l'intérieur du triangle formé par la courbe, l'axe des abscisses et l'ordonnée du point* : l'inspection des quatre figures ci-dessous montre clairement que *ce point* A *est celui dont*



l'abscisse α *rend* $f(x)$ *et* $f''(x)$ *de même signe* (*). Nous aurons OT = OC + CT, ou

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}. \qquad (2)$$

(*) Considérons, par exemple, la *fig.* I. L'arc AB tournant sa convexité *vers le haut*, $f''(x)$ est constamment *négative*, et la courbe est *au-dessous* de sa tangente. Donc la tangente au point B, dont l'ordonnée est *positive*, tomberait en dehors du triangle RBD. Au contraire, la tangente au point A, pour lequel l'ordonnée est *négative*, est située dans le triangle CAR; etc.

2° Menons la corde AB : elle laisse d'un même côté l'arc ARB, puisque celui-ci est convexe. Le point S, où AB coupe l'axe des abscisses, partage CD en deux segments proportionnels à AC, BD; donc

$$\mathrm{SD} = \mathrm{CD}\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BD}+\mathrm{AC}} = (\beta-\alpha)\frac{f(\beta)}{f(\beta)-f(\alpha)}.$$

Conséquemment, en désignant OS par β_1 :

$$\beta_1 = \beta - (\beta-\alpha)\frac{f(\beta)}{f(\beta)-f(\alpha)}. \qquad (3)$$

Les formules (2), (3) résolvent la question proposée : en effet, le *point-racine* R est compris entre les points T, S, et ceux-ci sont compris entre C et D.

279. *Limite de l'erreur commise.* — La racine inconnue a étant comprise entre α_1 et β_1, la différence $\beta_1-\alpha_1$ est une *limite de l'erreur à laquelle donne lieu la méthode de Newton*. Or,

$$\beta_1-\alpha_1 = (\beta-\alpha)\left[1-\frac{f(\beta)}{f(\beta)-f(\alpha)}\right]+\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

ou

$$\beta_1-\alpha_1 = -(\beta-\alpha)\left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}\right]+\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Pour simplifier cette expression, observons que

$$f(\beta)-f(\alpha) = (\beta-\alpha)f'(\alpha)+(\beta-\alpha)^2\frac{f''(\alpha)}{1.2}+(\beta-\alpha)^3\frac{f'''(\alpha)}{1.2.3}+\cdots;$$

donc, en posant :

$$\beta-\alpha=\varepsilon,\quad \beta_1-\alpha_1=\varepsilon_1,\quad \varphi(\alpha)=\frac{f''(\alpha)}{1.2}+\frac{\varepsilon f'''(\alpha)}{1.2.3}+\cdots,$$

nous aurons

$$\varepsilon_1=\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)+\varepsilon\varphi(\alpha)},$$

ou
$$\varepsilon_1 = \varepsilon \frac{f(\alpha)\,\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)\left[f'(\alpha) + \varepsilon\varphi(\alpha)\right]};$$
ou enfin, à cause de
$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}:$$
$$\varepsilon_1 = -\varepsilon h \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha) + \varepsilon\varphi(\alpha)}. \qquad (4)$$

280. La formule (4) nous permet de résumer, dans les termes suivants, la marche à suivre pour approcher indéfiniment d'une racine a de l'équation $f(x) = 0$, après que cette racine a été séparée :

Connaissant deux quantités α, β, entre lesquelles tombe la racine a, *et qui ne comprennent aucune racine, soit de* $f'(x) = 0$, *soit de* $f''(x) = 0$, *on désignera par α celle de ces deux limites qui rend* $f(x)$ *et* $f''(x)$ *de même signe; et, pour avoir une valeur plus approchée α_1, on emploiera les formules*
$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \qquad (A)$$
$$\alpha_1 = \alpha + h. \qquad (B)$$

En désignant par ε la différence positive ou négative $\beta - \alpha$, c'est-à-dire l'approximation (*) *de α, et par ε_1 l'approximation de α_1, on a*
$$\varepsilon_1 = -\varepsilon h \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha) + \varepsilon\varphi(\alpha)}. \qquad (C)$$

Cette formule, dans laquelle $\varphi(\alpha)$ représente
$$\frac{f''(\alpha)}{1.2} + \varepsilon\frac{f'''(\alpha)}{1.2.3} + \varepsilon^2\frac{f^{\text{IV}}(\alpha)}{1.2.3.4} + \cdots,$$

(*) *Approximation de α* signifie ici : *limite de l'erreur commise en prenant α au lieu de* a.

indique aussi à quel degré d'approximation on doit calculer h.

Opérant sur α_1 comme on a opéré sur α, on trouvera une valeur α_2, encore plus approchée de la racine a; *et ainsi de suite.*

281. *Application.* — Nous allons faire usage de la méthode précédente pour calculer la plus petite racine positive de l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

On a vu (**240**) que cette racine est comprise entre 1,35 et 1,36. D'ailleurs, quand x varie entre ces limites, $f'(x) = 3x^2 - 7$ reste constamment négative, et $f''(x) = 6x$ reste constamment positive: la méthode de Newton est donc applicable. En outre, la première limite 1,35, rendant $f(x)$ et $f''(x)$ de même signe, nous prendrons $\alpha = 1,35$, d'où résulte $\varepsilon = 0,01$. Cela posé, $f(\alpha) = 0,010\ 375$; et l'on trouve :

$$f'(\alpha) = -1,532\ 5, \quad \varphi(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{1.2} + \varepsilon \frac{f'''(\alpha)}{1.2.3} = 4,06.$$

Substituant dans les formules (A) et (C), nous aurons donc

$$h = \frac{0,010\ 375}{1,532\ 5} = \frac{1,037\ 5}{153,25},$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{1,037\ 5}{15\ 325} \cdot \frac{4,06}{-1,532\ 5 + 0,040\ 6} = \frac{1,037\ 5}{15\ 325} \cdot \frac{4,06}{1,491\ 9}.$$

Le premier facteur de ε_1 est à peu près égal à $\frac{1}{15\ 000}$; l'autre est moindre que 3; donc $\varepsilon_1 < 0,000\ 2$. Ce résultat montre qu'il suffit, dans ce premier calcul, de déterminer les *trois* premières décimales de la valeur de h : si l'on en calculait *quatre*, on ne serait pas sûr de la dernière. Effectuant, on trouve

$$h = \frac{1,037\ 5}{153,25} = 0,006;$$

puis $\alpha_1 = 1{,}356,\quad \varepsilon_1 = 0{,}000\,18.$

Ces valeurs donnent

$$\alpha_1^2 = 1{,}838\,736,\quad \alpha_1^3 = 2{,}495\,326\,016,$$

$$f(\alpha_1) = 0{,}001\,326\,016,\quad f'(\alpha_1) = -1{,}483\,792,\quad \varphi(\alpha_1) = 4{,}069\,(^*).$$

Par suite :

$$h_2 = \frac{1{,}326\,016}{1\,483{,}792},$$

$$\varepsilon_2 = 0{,}00018\,\frac{1{,}326\,016}{1{,}483\,792}\cdot\frac{4{,}069}{1{,}483\,792 - 0{,}004\,069} < 0{,}000\,005.$$

D'après cette nouvelle valeur, on doit évaluer h_2 à moins de 0,000 01 : $h_2 = 0{,}000\,89$; puis

$$\alpha_2 = 1{,}356\,89,\quad \varepsilon_2 = 0{,}000\,01.$$

On trouve, de la même manière :

$$f(\alpha_2) = 0{,}000\,008\,664\,087\,769,\quad f'(\alpha_2) = -1{,}476\,548\,583\,7,$$

$$\varphi(\alpha_2) = 4{,}070\,68;\quad h_3 = \frac{8{,}664\,087\,769}{1\,476\,548{,}583\,7};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{8{,}664\,087\,769}{147\,654\,858\,370}\cdot\frac{4{,}070\,68}{1{,}476\,507\,876\,9} < 0{,}000\,000\,002,$$

$$h_3 = 0{,}000\,005\,867,\quad \alpha_3 = 1{,}356\,895\,867,\quad \varepsilon_3 = 0{,}000\,000\,001;$$

$$f(\alpha_3) = 0{,}000\,000\,001\,317\,547\,970\,813\,679\,363,$$

$$f'(\alpha_3) = -1{,}476\,500\,818\,554\,954\,933,\quad \varphi(\alpha_3) = 4{,}070\,687\,602;$$

$$h_4 = \frac{1{,}317\,547\,970\,813\,679\,363}{1\,476\,500\,818{,}354\,954\,933},\quad \varepsilon_4 < 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,01;$$

$$h_4 = 0{,}000\,000\,000\,892\,209\,44;$$

$$\alpha_4 = 1{,}356\,895\,867\,892\,209\,44.$$

(*) Il est à peine besoin de faire observer que ces dernières quantités, au lieu d'être calculées directement, pourraient se déduire des valeurs de $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, etc.

Une nouvelle application des formules (A), (B), (C) ferait connaitre les *seize* décimales qui suivent celles-ci; etc.

Séparation des racines, par la méthode de Newton.

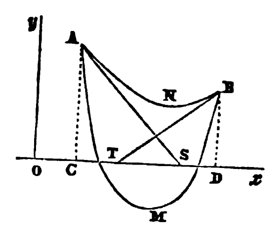
282. La méthode de Newton, ou plutôt la construction de la courbe dont l'ordonnée est $f(x)$, permet, presque toujours, d'effectuer très-simplement la séparation des racines réelles de $f(x)=0$, ou de reconnaître que cette équation a des racines imaginaires, non indiquées par le Théorème de Descartes.

Remarquons d'abord que la véritable difficulté du problème se réduit, le plus souvent, à *reconnaître si deux quantités* α, β, *qui, substituées à* x *dans* f(x), *ont donné des résultats de même signe, comprennent entre elles deux racines de* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$, *ou n'en comprennent aucune.*

Cela posé, si la première dérivée, $f'(x)$, ne changeait pas de signe entre $x=\alpha$ et $x=\beta$, $f(x)$ serait constamment croissante ou constamment décroissante dans le même intervalle; et, puisque $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ont même signe, cette fonction ne pourrait s'annuler. Autrement dit, *si l'équation* $\mathrm{f}'(\mathrm{x})=0$ *n'avait aucune racine entre* α *et* β, *il en serait de même pour l'équation proposée,* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$.

Le cas où l'équation dérivée, $f'(x)=0$, n'aurait aucune racine entre α et β étant mis de côté, nous admettrons que *cette équation a une seule racine comprise entre ces deux quantités :* si elle en avait plus d'une, on remplacerait α et β par d'autres limites, plus resserrées.

Enfin, nous admettrons aussi que la seconde dérivée, $f''(x)$, conserve le même signe entre $x=\alpha$ et $x=\beta$: ceci revient à supposer que la courbe représentée par $y=f(x)$ est convexe entre les points ayant α, β pour abscisses.



282. Soient A, B ces deux points (*); soit AMB ou ANB l'arc qui les joint, et dont la forme est encore inconnue : il s'agit de savoir si cet arc coupe en deux points l'axe des abscisses, ou s'il ne le coupe pas.

Aux deux limites α, β, appliquons la formule de Newton, c'est-à-dire calculons les sous-tangentes CS, DT. En supposant, comme cela aurait lieu d'après la figure :

$$\alpha < \beta, \quad f'(\alpha) < 0, \quad f'(\beta) > 0;$$

nous aurons, en considérant les valeurs absolues :

$$CS = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad DT = \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}.$$

Or, si les tangentes AS, BT se croisent *au-dessus* de Ox (**), c'est-à-dire si la somme des sous-tangentes surpasse CD, l'arc inconnu a la forme ANB; il ne coupe pas l'axe des abscisses, et l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune racine entre α et β. Nous pouvons donc énoncer cette proposition :

Les quantités α, β satisfaisant aux conditions indiquées ci-dessus, si l'on a

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} > \beta - \alpha, \tag{5}$$

l'équation f(x) = 0 *n'a aucune racine entre α et β.*

Quand la somme des sous-tangentes est moindre que CD, c'est-à-dire lorsqu'on trouve

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} < \beta - \alpha, \tag{6}$$

(*) Sur la figure, on les a placés, pour fixer les idées, au-dessus de l'axe des abscisses; mais le raisonnement est indépendant de cette hypothèse.

(**) On devrait lire *au-dessous*, si $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ étaient négatives.

on ne peut rien affirmer sur l'existence ou la non-existence de deux racines entre α et β; mais, en prenant

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad \beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)},$$

opérant sur ces nouvelles limites comme sur les premières, et continuant de la même manière, on pourra *presque toujours,* après un très-petit nombre d'essais, reconnaître si les deux limites données ne comprennent aucune racine, ou si elles en comprennent deux : ajoutons que, dans ce dernier cas, on aura approché des deux racines à la fois, et que la substitution d'une quantité intermédiaire entre les limites α_n, β_n, auxquelles on se sera arrêté, permettra, *presque toujours* aussi, de séparer les deux racines.

Les exemples suivants montrent la simplicité et l'efficacité de cette méthode.

384. *Applications.* — I. $x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$.

$$f'(x) = 4x^3 + 6x - 2, \quad \frac{1}{6}f''(x) = 2x^2 + 1.$$

La première dérivée s'annule pour une valeur de x comprise entre 0 et $\frac{1}{3}$; la seconde dérivée est essentiellement positive : nous pouvons donc prendre $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{3}$. Or,

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\frac{55}{81}}{\frac{4}{27}} + \frac{1}{2}.$$

Cette somme surpassant $\frac{1}{3}$, *l'équation n'a pas de racines réelles* (*).

(*) On peut encore arriver à cette conclusion en observant que le trinôme $3x^2 - 2x + 1$ est toujours positif.

II. $$x^4 + x^2 - 3{,}999x + 4 = 0.$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - 3{,}999, \quad \frac{1}{2}f''(x) = 6x^2 + 1.$$

L'équation a *peut-être* deux racines, comprises entre 0 et 1. Ces nombres satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus, nous prendrons $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Nous obtenons ainsi

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{0{,}001}{0{,}001} + \frac{4}{3{,}999}.$$

Le second membre est plus grand que 1 ; donc *l'équation n'a pas de racines réelles.*

III. $$100x^4 + 67x^2 - 39x + 11 = 0.$$

Quelques essais préliminaires montrent que l'on doit chercher deux racines entre 0,3 et 0,4. D'ailleurs,

$$f'(x) = 400x^3 + 134x - 39$$

s'annule une fois seulement dans cet intervalle, et $f''(x)$ est toujours positive.

Soient donc

$$\alpha = 0{,}3, \quad \beta = 0{,}4.$$

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \ \ 0{,}81 + \ \ 6{,}03 - 17{,}7 \ + 11 = 0{,}14,\\
f'(\alpha) &= 10{,}8 \ + 40{,}2 \ \ - 39 = - \ \ 8,\\
f(\beta) &= \ \ 2{,}56 + 10{,}72 - 23{,}8 \ + 11 = 0{,}68,\\
f'(\beta) &= 25{,}6 \ + 53{,}6 \ \ - 39 \ \ = 20{,}2;
\end{aligned}$$

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{0{,}68}{20{,}2} + \frac{0{,}14}{8} < 0{,}1.$$

Les limites étant trop écartées, nous prendrons

$$\alpha_1 = 0{,}3 + \frac{0{,}14}{8} = 0{,}317\ldots,$$

$$\beta_1 = 0,4 - \frac{0,68}{20,2} = 0,364...;$$

ou plutôt

$$\alpha_1 = 0,32, \quad \beta_1 = 0,36.$$

$$f(\alpha_1) = \ 1,048\,576 + \ 6,862\,2 - 18,88 + 11 = 0,030\,776,$$
$$f'(\alpha_1) = 13,107\,2 \quad + 42,88 \quad - 59 = -3,012\,8,$$
$$f(\beta_1) = \ 1,679\,619 + \ 8,683\,2 - 21,24 + 11 = 0,122\,819,$$
$$f'(\beta_1) = 18,662\,4 \quad + 48,24 \quad - 59 \quad = 6,902\,4;$$

$$\frac{f(\beta_1)}{f'(\beta_1)} - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} = \frac{0,122\,819}{6,902\,4} + \frac{0,030\,776}{3,012\,8} < 0,04.$$

Les limites sont donc encore trop écartées. Mais, $f(\alpha_1)$ étant une petite fraction, il y a lieu d'essayer si l'on ne peut pas remplacer β_1 par un nombre beaucoup plus voisin de α_1 : si l'on substitue 0,33, on trouve

$$f(0,33) = \ 1,185\,921 + \ 7,296\,3 - 19,47 + 11 = 0,012\,221,$$
$$f'(0,33) = 14,374\,8 \quad + \ 44,22 \quad - 59 = -0,405\,2.$$

Les racines, si elles existent, ne sont pas comprises entre 0,32 et 0,33 : essayons 0,34.

$$f(0,34) = \ 1,336\,336 + \ 7,745\,2 - 20,06 + 11 = 0,021\,536,$$
$$f'(0,34) = 15,721\,6 \quad + 45,56 \quad - 59 \quad = 2,281\,6.$$

Soient actuellement $\alpha_2 = 0,33$, $\beta_2 = 0,34$; d'où

$$\frac{f(\beta_2)}{f'(\beta_2)} - \frac{f(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)} = \frac{0,021\,536}{2,281\,6} + \frac{0,012\,221}{0,405\,2} > 0,01 :$$

l'équation a toutes ses racines imaginaires.

IV. $\qquad 100x^4 + 67x^2 - 59,04x + 11 = 0.$

On trouve, comme dans l'exemple précédent :

$$\alpha = 0,3, \quad \beta = 0,4;$$

$$f(\alpha) = 0,128, \quad f'(\alpha) = - \ 8,04,$$
$$f(\beta) = 0,664, \quad f'(\beta) = \ 20,16;$$

$$\alpha_1 = 0,32, \quad \beta_1 = 0,36;$$

$$f(\alpha_1) = 0,017\,920, \quad f'(\alpha_1) = -3,052\,8,$$
$$f(\beta_1) = 0,108\,419, \quad f'(\beta_1) = 6,862\,4;$$

$$\alpha_2 = 0,33, \quad \beta_2 = 0,34;$$

$$f(\alpha_2) = -0,000\,979, \quad f(\beta_2) = 0,007\,936.$$

La séparation est effectuée : *l'équation a une racine comprise entre* 0,32 *et* 0,33, *et une seconde racine entre* 0,33 *et* 0,34.

Exercices.

I. Calculer les racines de l'équation

$$70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1 = 0.$$

Résultat :

$$x_1 = 0,069\,431\,844\,202\,975\,4,$$
$$x_2 = 0,330\,009\,478\,207\,567\,7,$$
$$x_3 = 0,669\,990\,521\,792\,432\,3,$$
$$x_4 = 0,930\,568\,155\,797\,024\,6.$$

II. $1\,716x^6 - 5\,148x^5 + 5\,742x^4 - 2\,904x^3 + 648x^2 - 54x + 1 = 0.$

Résultat :

$$x_1 = 0,025\,446\,043\,828\,620\,2,$$
$$x_2 = 0,129\,234\,407\,200\,302\,8,$$
$$x_3 = 0,297\,077\,424\,311\,301\,5,$$
$$x_4 = 0,702\,922\,575\,688\,698\,5,$$
$$x_5 = 0,870\,765\,592\,799\,697\,2,$$
$$x_6 = 0,974\,553\,956\,171\,379\,8 \text{ (*)}.$$

(*) Ces deux exemples, tirés d'un Mémoire de l'illustre Gauss, ont été reproduits dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Nous les avons déjà proposés. (Chap. XXI.)

III. Résoudre et *discuter* l'équation

$$\sqrt{x+80}+\sqrt{x+15}+\sqrt{x}=0.$$

IV. Calculer les racines de l'équation

$$3\,375\,000x^3 - 12\,524\,692\,500x^2 + 15\,493\,128\,120\,000x - 6\,388\,367\,590\,282\,499 = 0.$$

Résultat :

$$x_1 = 1\,236{,}996\,452\,73,$$
$$x_2 = 1\,237{,}004\,351\,36,$$
$$x_3 = 1\,237{,}019\,195\,91 \text{ (*)}.$$

V. Les équations

$$3\,797x^4 + 4\,951x^3 + 5\,892x^2 + 2\,876x + 6\,942 = 0,$$
$$3\,447x^6 + 14\,560x^5 + 22\,430x^4 + 25\,857x^3 + 29\,193x^2 + 11\,596x + 5\,602 = 0,$$

ont toutes leurs racines imaginaires.

VI. Trouver toutes les racines réelles de l'équation

$$(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1 = 0;$$

n étant plus grand que 1.

Résultat :

$$x = 0,\quad x = -\frac{1}{2},\quad x = -1 \text{ (**)}.$$

(*) On cherche d'abord la transformée

$$y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{8} = 0,$$

qui a pour racines

$$y_1 = -\sin 50° = -0{,}766\,045,$$
$$y_2 = -\sin 10° = -0{,}173\,648,$$
$$y_3 = \sin 70° = 0{,}939\,693.$$

(**) *Voyez* p. 199.

VII. Déterminer A de manière que l'équation

$$100x^4 + 67x^2 - Ax + 11 = 0$$

ait deux racines égales.

Résultat :

$$A = \frac{178}{10}\sqrt{11}; \quad a = \frac{1}{10}\sqrt{11};$$

a étant la racine double.

CHAPITRE XXIV.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

285. Les procédés employés pour calculer les racines incommensurables d'une équation $f(x) = 0$, que nous avons fait connaître dans le Chapitre précédent, s'appuient tous sur la continuité de la fonction entière $f(x)$. Ils sont donc applicables, à peu près sans modifications, à la résolution de toute équation de la forme $f(x)=0$, dont le premier membre, sans être algébrique, est une fonction continue de x, sinon pour toutes les valeurs de cette variable, au moins dans un certain intervalle. Cependant, la discussion des fonctions transcendantes étant ordinairement assez épineuse, les méthodes indiquées ci-dessus seront presque toujours insuffisantes, prises séparément, en sorte que l'on sera obligé de faire des emprunts à chacune d'elles. Les exemples suivants montreront suffisamment la marche à suivre dans chaque cas particulier.

386. Exemple I. — *Résoudre l'équation* (*)

$$e^{2x} = \frac{x+1}{x-1}. \tag{1}$$

On simplifiera le problème si, après avoir pris les logarithmes népériens des deux membres, on met l'équation sous la forme

$$2x - 1\frac{x+1}{x-1} = 0. \tag{2}$$

En effet, en représentant par y le premier membre de la nouvelle équation, on reconnaît immédiatement que :

1° La fonction y reste continue et *croissante* à partir de

$$x = 1 + \varepsilon \text{ (**)};$$

2° Cette fonction, *négative* pour $x = 1 + \varepsilon$, est *positive* pour $x = 2$.

Par conséquent, l'équation (2) a *une seule racine positive,* comprise entre 1 et 2.

387. Pour en approcher, donnons à x les valeurs 1,1 et 1,2; nous trouvons :

pour $x = 1{,}1,\quad y = 2{,}2 - 1\,21 = -\,0{,}844\,522\,437\ldots;$
pour $x = 1{,}2,\quad y = 2{,}4 - 1\,11 = +\,0{,}002\,104\,727\ldots.$

La racine est donc comprise entre les deux nombres substitués, et beaucoup plus près du second que du premier.

D'ailleurs,

$$y' = 2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 2 + \frac{2}{x^2-1},\quad y'' = -\frac{4x}{(x^2-1)^2};$$

(*) Elle se rencontre dans la théorie de la *chaînette* et dans la Mécanique céleste (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLII, p. 1184).

(**) Suivant l'usage, la lettre ε désigne une quantité positive très-petite.

et chacune de ces fonctions conservant son signe à partir de $x=1+\varepsilon$, la méthode de Newton est applicable (**280**).

Faisant $\alpha=1,2$ dans la formule

$$h=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\ (^*),$$

on a

$$h=-0,000\,32\ldots$$

Ce résultat permet de supposer que la racine est comprise entre 1,199 67 et 1,199 68. Effectivement,

$$x=1,199\,67$$

conduit à

$$y=2,399\,34-\log\frac{219\,967}{19\,967}\times 1.10\ (^{**})=-0,000\,106\,788;$$

$$x=1,199\,68$$

donne

$$y=2,399\,36-\log\frac{219\,968}{19\,968}\times 1.10=+0,000\,008\,999.$$

Une nouvelle application de la formule de Newton montre que la racine est comprise entre 1,199 678 et 1,199 679.

La substitution de ces valeurs donne ensuite :

pour $x=1,199\,678$,

$$y=2,399\,356-\log\frac{2\,199\,678}{199\,678}1.10=-0,000\,004\,4\ldots;$$

pour $x=1,199\,679$,

$$y=2,399\,358-\log\frac{2\,199\,679}{199\,679}1.10=+0,000\,002\,2\ldots.$$

(*) La limite 1,2 étant déjà fort approchée, nous ne suivons pas la règle qui consiste à choisir la limite pour laquelle $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

(**) Les Tables de Callet ne contenant pas les logarithmes népériens des nombres supérieurs à 1 200, il est nécessaire, pour continuer le calcul, d'employer comme intermédiaires les logarithmes de Briggs.

288. Si nous appliquons actuellement les formules (2) et (3) du n° **278**, en supposant

$$\alpha = 1{,}199\,678, \quad \beta = 1{,}199\,679,$$

nous aurons :

$$f(\alpha) = -0{,}000\,004\,4, \quad f(\beta) = 0{,}000\,002\,2,$$

$$\log f'(\alpha) = -\log \frac{2\alpha^2}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = 0{,}816\,470\,2;$$

puis :

$$\alpha_1 = 1{,}199\,678 + 0{,}000\,000\,671\,4 = 1{,}199\,678\,671\,4,$$

$$\beta_1 = 1{,}199\,679 - 0{,}000\,001 \cdot \frac{22}{66} = 1{,}199\,678\,666\,6;$$

et enfin, avec *huit* décimales exactes,

$$x = 1{,}199\,678\,67.$$

289. Exemple II. — *Déterminer le coefficient* a, *de manière que l'équation*

$$e^x + e^{-x} - ax = 0 \tag{3}$$

ait deux racines égales.

On dit qu'*une équation transcendante* f(x) = 0 *a deux racines égales à* α, *quand la quantité* α *annule, en même temps,* f(x) *et* f′(x) (*).

Cela posé, la dérivée du premier membre de l'équation (3) est

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - a.$$

Égalant cette quantité à zéro, nous aurons à déterminer *a* par la condition que l'équation

$$e^x - e^{-x} - a = 0 \tag{4}$$

ait une racine commune avec la proposée (3).

(*) Il est évident que la définition des racines égales, fondée sur la considération du plus grand commun diviseur, n'est pas applicable, en général, aux équations transcendantes.

L'élimination de a donne

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = x,$$

ou

$$e^{2x} = \frac{x+1}{x-1}. \qquad (5)$$

Cette équation est précisément celle que nous avons considérée dans l'Exemple I : elle a pour racine

$$x = 1,199\,678\,67.$$

Il resterait donc à substituer cette valeur dans la formule

$$a = e^x - e^{-x};$$

mais il est plus commode de prendre celle-ci :

$$a = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad (6)$$

que l'on tire aisément des équations (3) et (4). Elle donne, au moyen des Tables logarithmiques,

$$a = 3,017\,76.$$

290. *Remarque.* — Tant que le coefficient a est supérieur à cette dernière valeur, l'équation (3) a *deux racines positives inégales;* elle n'en a aucune dans le cas contraire (*). Par exemple, l'équation

$$e^x + e^{-x} - 3x = 0$$

n'a pas de racines réelles.

(*) Plus la valeur de x est grande, plus y est petit, pour une même valeur de x.

391. Exemple III. — *Résoudre l'équation*

$$u - e \sin u = \zeta, \tag{7}$$

en supposant

$$e = 0{,}245\,316\,15, \quad \zeta = 329°44'27'',66.$$

La résolution de l'équation (7) constitue ce qu'on appelle, en Astronomie, le *Problème de Kepler* : e est l'*excentricité* d'une planète ; u, l'*anomalie excentrique* ; ζ, le *moyen mouvement*.

Avant de chercher la valeur de u, observons que, e étant un nombre, on devrait, pour rendre l'équation *homogène*, exprimer l'arc ζ en parties du rayon 1 ; alors l'arc u serait également exprimé en parties du rayon. Mais il est plus simple d'évaluer, *en parties de la circonférence*, l'arc z dont le rapport au rayon est la fraction e. Or, l'arc équivalent au rayon a pour valeur

$$\frac{180°}{\pi} = 57°,295\,779\,130\,823\ldots;$$

donc

$$z = \frac{180°}{\pi} \cdot e = 14°,055\,579\,947\ldots$$

392. Pour calculer la valeur de u, nous emploierons d'abord la *méthode des approximations successives*, dont on a déjà vu un exemple ([illegible]).

Négligeant le terme $e \sin u$, ou plutôt $z \sin u$, nous aurons

$$u_0 = \zeta.$$

Cette valeur, substituée dans (7), conduit à

$$u_1 = z \sin u_0 + \zeta.$$

Celle-ci donne, de la même manière,

$$u_2 = z \sin u_1 + \zeta,$$

puis $$u_3 = z \sin u_2 + \zeta,$$
etc.

Le calcul logarithmique donne ensuite :

$$\log z = 1{,}147\,848\,8$$
$$\log(-\sin u_0) = \log\sin 30°15'32'',34 = \bar{1}{,}702\,352\,5$$
$$0{,}850\,201\,3$$
$$z \sin u_0 = -7°{,}082\,74 = -7°4'5'',864$$
$$u_1 = 322°40'21'',80$$

$$\log z = 1{,}147\,848\,8$$
$$\log(-\sin u_1) = \log\sin 37°19'38'',2 = \bar{1}{,}782\,735\,6$$
$$0{,}930\,584\,4$$
$$z \sin u_1 = -8°522\,83 = -8°31'22'',188$$
$$u_2 = 321°13'5'',47$$

$$\log z = 1{,}147\,848\,8$$
$$\log(-\sin u_2) = \log\sin 38°46'54'',53 = \bar{1}{,}796\,821\,5$$
$$0{,}944\,670\,3$$
$$z \sin u_2 = -8°{,}803\,80 = -8°48'13'',68$$
$$u_3 = 320°56'13'',98$$

$$\log z = 1{,}147\,848\,8$$
$$\log(-\sin u_3) = \log\sin 39°\ 3'46'',02 = \bar{1}{,}799\,458\,8$$
$$0{,}947\,307\,6$$
$$z \sin u_3 = -8°857\,43 = -8°51'18'',75$$
$$u_4 = 320°53'8'',91.$$

292. Pour continuer le calcul, nous ferons usage de la méthode de Newton, en prenant

$$\alpha = 320°53'.$$

Nous aurons, de cette manière :

$$f(\alpha) = \alpha - z \sin \alpha - \zeta =$$
$$320°53' + 8°52'3'',68 - 329°44'27'',66 = 36''02,$$
$$f'(\alpha) = 1 - e \cos \alpha \text{ (*)} = 1 - 0,190\,332 = 0,809\,668;$$

puis

$$h = -\frac{36'',02}{0,809\,668} = -44'',487\,3.$$

La valeur de la racine cherchée est donc, à moins de 0'',01,

$$u = 320°52'15'',32.$$

294. Exemple IV. — *Résoudre l'équation* (**)

$$\varphi + 2(\pi - \varphi)\sin^2\frac{1}{2}\varphi - \sin\varphi = \frac{\pi}{2}. \qquad (8)$$

On peut la simplifier en posant $\pi - \varphi = x$, et remplaçant $2\sin^2\frac{1}{2}\varphi$ par $1 - \cos\varphi = 1 + \cos x$. On obtient ainsi

$$\sin x - x \cos x - \frac{\pi}{2} = 0. \qquad (9)$$

Si l'on représente par y le premier membre de cette nouvelle équation, on a

$$y' = x \sin x.$$

Par conséquent, la fonction y a *une infinité de maximums et de minimums*, déterminés par $\sin x = 0$, ou $x = k\pi$,

(*) La dérivée étant un *rapport*, z doit être remplacé par e. Du reste, si l'on fait $\alpha = \frac{180°}{\pi} u$, et que l'on calcule $\frac{f(u)}{f'(u)}$, on arrive à la même valeur de h.

(**) Elle répond à ce problème : *Partager un cercle en deux parties équivalentes, au moyen d'une circonférence ayant son centre sur la circonférence donnée.*

k étant un entier quelconque, positif, négatif ou zéro. D'ailleurs, pour

$$x = \cdots -3\pi,\quad -2\pi,\quad -\pi,\quad 0,\quad \pi,\quad 2\pi,\quad 3\pi, \ldots,$$
$$y = \cdots -\frac{7}{2}\pi,\quad \frac{5}{2}\pi,\quad -\frac{3}{2}\pi,\quad -\frac{1}{2}\pi,\quad \frac{1}{2}\pi,\quad -\frac{3}{2}\pi,\quad \frac{5}{2}\pi, \ldots$$

Il résulte, de l'inspection de ce tableau, que l'équation (9) a une infinité de racines réelles, comprises, chacune, entre deux multiples consécutifs de π : il y a exception pour les valeurs $-\pi$ et 0, qui ne comprennent aucune racine (*). Nous nous occuperons seulement du calcul de la plus petite racine positive (**).

295. Après quelques tâtonnements, on trouve que cette racine est comprise entre $\frac{10}{18}\pi$ et $\frac{11}{18}\pi$. Pour ces deux valeurs de x, y égale $-0,282\,915$ et $+0,025\,529$. Donc la racine diffère très-peu de $\frac{11}{18}\pi$. Appliquant, à cette seconde limite, la correction de Newton, on a

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = -\frac{0,025\,529}{\frac{11}{18}\pi \sin\left(\frac{11}{18}\pi\right)} = -0,014\,151.$$

D'ailleurs, $\frac{11}{18}\pi = 1,919\,86$; de sorte que la valeur corrigée est $1,919\,86 - 0,014\,15 = 1,905\,71$. Substituant dans le premier membre de l'équation (9), on trouve $y = 0,000\,019$.

La formule de Newton, appliquée une seconde fois, donne

$$h = -0,000\,010,\quad x = 1,905\,70,$$

puis

$$y = 0,000\,002.$$

(*) La courbe dont l'ordonnée est y se compose d'une seule branche continue, sinueuse, indéfinie, rencontrant l'axe des abscisses en une infinité de points; etc.

(**) Elle répond au problème de géométrie.

Cette dernière fraction est si petite, qu'il est inutile de pousser plus loin les calculs, et que l'on peut prendre, pour la solution cherchée,

$$x = 1{,}905\,70 = 109°11'18''.$$

Par suite,

$$\varphi = 70°48'42'',$$

à moins d'une seconde.

296. Exemple V. — *Discuter et résoudre*

$$f(x) = \operatorname{tg} x - x = 0. \qquad (10)$$

1° L'équation (10) résulte de l'élimination de y entre

$$y = x, \quad y = \operatorname{tg} x. \qquad (11)$$

De ces deux équations, la première représente une *droite,* bissectrice de l'angle des axes; et la seconde, une *courbe* composée d'*une infinité de branches infinies, égales entre elles, ayant pour asymptotes les droites déterminées par* $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\frac{3\pi}{2}$, $x = \pm\frac{5\pi}{2}$, ... : les abscisses des points communs à la courbe et à la droite, sont les racines de la proposée (10). La droite coupe chacune des branches de la courbe; donc *l'équation* (10) *a une infinité de racines réelles.*

2° La droite et la courbe passent à l'origine; donc *zéro* est une racine. Il est facile de voir, soit au moyen d'une figure, soit en calculant $f'(x)$ et $f''(x)$, que *cette racine nulle est triple.* Nous en ferons abstraction.

3° L'origine est un *centre* de la droite et de la courbe : conséquemment, les points d'intersection de ces lignes sont, deux à deux, symétriques par rapport à ce centre commun. Autrement dit, les racines de l'équation (10) sont, deux à deux, égales et de signes contraires. Ce résultat, évident à l'inspection de l'équation, rend inutile la recherche des racines négatives.

4° La plus petite racine positive est comprise entre π et $\frac{3\pi}{2}$; la *deuxième racine* est comprise entre 2π et $\frac{5\pi}{2}$; etc. En général, la $n^{ième}$ racine positive est comprise entre $n\pi$ et $\frac{(2n+1)\pi}{2}$. En outre, *à mesure que* n *augmente, la différence* $\frac{(2n+1)\pi}{2} - x$ *diminue indéfiniment.*

297. *Calcul d'une racine.* — La méthode des approximations successives s'applique aisément ici, après qu'on a fait subir, à l'équation (10), une transformation remarquable.

Soit z la différence entre $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ et x :

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{2} - z.$$

De là résulte

$$\operatorname{tg} x = \cot z;$$

ou, à cause de l'équation donnée :

$$x = \cot z, \quad \frac{1}{x} = \operatorname{tg} z, \quad z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}.$$

Donc

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}. \tag{12}$$

Considérons en particulier la $n^{ième}$ racine, qui diffère très-peu de $(2n+1)\frac{\pi}{2} = a$. Nous pouvons prendre, comme première approximation, $x = a = x_1$; après quoi l'équation (12) donne, successivement,

$$x_2 = a - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x_1}, \quad x_3 = a - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x_2}, \quad x_4 = a - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x_3}, \text{etc.}$$

Soit, par exemple, $n = 5$; alors

$$x_1 = a = \frac{11}{2}\pi, \quad x_2 = \frac{11}{2}\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x_1}, \quad x_3 = \frac{11}{2}\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x_2}, \ldots$$

Voici la disposition du calcul :

$$\log 2 = 0{,}301\,030\,0 \quad +$$
$$\log 11 = 1{,}041\,392\,7 \quad -$$
$$\log \pi = 0{,}497\,149\,9 \quad -$$
$$\overline{2},762\,487\,4$$
$$\text{arc corresp.} = 3^\circ 18' 44''$$
$$3^\circ = 0{,}052\,359\,9$$
$$18' = 0{,}005\,236\,0$$
$$44'' = 0{,}000\,213\,3$$
$$0{,}057\,809\,2$$
$$\pi = 3{,}141\,592\,65$$
$$5\pi = 15{,}707\,963\,2 \quad +$$
$$\frac{\pi}{2} = 1{,}570\,796\,3 \quad +$$
$$a = \frac{11}{2}\pi = 17{,}278\,759\,5 \quad +$$
$$0{,}057\,809\,2 \quad -$$
$$x_2 = 17{,}220\,950\,3$$

$$\log x_2 = 1{,}236\,057\,2$$
$$\log \frac{1}{x_2} = \overline{2},763\,942\,8$$
$$\text{arc corresp.} = 3^\circ 19' 24''$$
$$3^\circ = 0{,}052\,359\,9$$
$$19' = 0{,}005\,526\,9$$
$$24'' = 0{,}000\,116\,3$$
$$0{,}058\,003\,1$$
$$\frac{11}{2}\pi = 17{,}278\,759\,5 \quad +$$
$$0{,}058\,003\,1 \quad -$$
$$x_3 = 17{,}220\,756\,4$$
$$\log x_3 = 1{,}236\,042\,3$$
$$\log \frac{1}{x_3} = \overline{2},763\,957\,7$$
$$\text{arc corresp.} = 3^\circ 19' 24'',5$$
$$= 0{,}058\,005\,5.$$

On aurait ensuite

$$x_4 = a - 0{,}058\,005\,5 = 17{,}220\,754\,0.$$

La comparaison de cette valeur avec celle de x_3 donne, à moins d'une unité du sixième ordre,

$$x = 17{,}220\,754.$$

On obtiendrait une approximation plus grande si l'on appliquait, à cette dernière valeur, la méthode de Newton.

298. Exemple VI. — *Discuter l'équation*

$$f(x) = ax - b - \sin x = 0, \tag{13}$$

en supposant

$$1 > a > 0, \quad b > 0.$$

Les valeurs extrêmes de sin x étant ± 1, on doit avoir

$$\frac{b+1}{a} > x > \frac{b-1}{a}. \qquad (14)$$

Soit, s'il est possible,

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \quad x = 2(k+1)\pi + \frac{\pi}{2},$$

ces arcs étant compris entre les limites $\frac{b+1}{a}$, $\frac{b-1}{a}$. Il en résulte

$$f(x) = ax - b - 1, \quad f(x) = ax - b + 1, \quad f(x) = ax - b - 1;$$

ou, par les inégalités (14) :

$$f(x) < 0, \quad f(x) > 0, \quad f(x) < 0.$$

De plus, pour ces mêmes valeurs de x, la dérivée

$$f'(x) = a - \cos x$$

se réduit à a. Elle ne peut s'annuler plus de deux fois dans l'intervalle compris entre $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ et $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ (*), ou entre $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ et $2(k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$; donc, dans le même intervalle, $f(x)$ s'annule une fois (**279**). Ainsi : *entre deux multiples impairs et consécutifs de* $\frac{\pi}{2}$, *il y a une racine de la proposée, pourvu que ces multiples soient compris entre* $\frac{b+1}{a}$ *et* $\frac{b-1}{a}$.

290. D'après cela, soient

$$\frac{b-1}{a} = i\frac{\pi}{2} + R, \quad \frac{b+1}{a} = i'\frac{\pi}{2} + R',$$

i, i' étant des *entiers impairs, positifs ou négatifs*, et R, R' étant des *arcs positifs, moindres que* π. Si l'on fait

$$x = (i+2)\frac{\pi}{2}, \quad x = (i+4)\frac{\pi}{2}, \ldots, \quad x = i'\frac{\pi}{2},$$

(*) $f'(x)$ ne s'annule pas dans le premier intervalle.

le nombre n des racines séparées est inférieur, d'une unité, à celui de ces valeurs de x; c'est-à-dire que

$$n=\frac{i'-i}{2}-1.$$

Ce n'est pas tout : il peut y avoir une racine entre $\frac{b-1}{a}$ et $(i+2)\frac{\pi}{2}$; il peut y en avoir une autre entre $i'\frac{\pi}{2}$ et $\frac{b+1}{a}$; donc le nombre N des racines de l'équation (13) est donné par une des trois formules :

$$N=\frac{i'-i}{2}-1,\quad N=\frac{i'-i}{2},\quad N=\frac{i'-i}{2}+1.$$

400. *Application :*

$$a=\frac{1}{1\,000\pi},\quad b=\frac{1}{20}.$$

Les limites $\frac{b-1}{a}$, $\frac{b+1}{a}$ deviennent, respectivement, -950π, $+1\,050\pi$. Divisant ces quantités par $\frac{\pi}{2}$, on a

$$i=-1\,901,\quad i'=+2\,099,\quad \frac{i'-i}{2}=2\,000.$$

Entre $\frac{b-1}{a}=-950\pi$ et $(i+2)\frac{\pi}{2}=-1\,899\frac{\pi}{2}$, il n'y a aucune racine; car ces deux valeurs de x donnent $f(x)<0$. De même, il n'y a pas de racine entre $i'\frac{\pi}{2}=2\,099\frac{\pi}{2}$ et $\frac{b+1}{a}=1\,050$. Le nombre des racines réelles de l'équation

$$\frac{x}{1\,000\pi}-\frac{1}{20}-\sin x=0$$

est donc

$$N=\frac{i'-i}{2}-1=1\,999.$$

401. *Remarque.* — On peut remplacer la méthode pré-

cédente par la construction de la droite et de la *sinusoïde* dont les équations seraient

$$y = ax - b, \quad y = \sin x.$$

Cette construction, si elle est faite avec soin, effectue non-seulement la *séparation* des racines, mais encore le *calcul* de chacune d'elles.

Exercices.

I. Partager un demi-cercle en deux parties équivalentes, par une parallèle au diamètre.

II. Trouver l'arc double de sa corde.

III. Résoudre

$$x^x - 10 = 0.$$

Résultat :

$$x = 2{,}506\,184.$$

IV. Résoudre

$$x \,\mathrm{l}\, x - 100 = 0.$$

Résultat :

$$x = 3{,}597\,285\,0\ldots$$

V. Résoudre

$$x - \cos x = 0.$$

Résultat :

$$x = 0{,}739\,085\,12\ldots$$

VI. Même question pour

$$(4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0.$$

Résultat :

$$x = 2{,}563\,434\,23\ (^*).$$

(*) Les quatre dernières questions sont tirées d'un savant Mémoire de Terquem, publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIV et XV.

VII. Calculer la racine positive de l'équation

$$\mathrm{l}(1+x)-\sin x=0.$$

VIII. Discuter l'équation

$$e^{\operatorname{tg} x}-x=1.$$

IX. Discuter les équations

$$x-\frac{1}{6}\sin 2x-\frac{2}{3}\operatorname{tg} x=0\ (*),\quad \sin x+x\cos x-1=0,$$

$$a^x+b^x=1,\quad \log\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2+1}{2x}-0{,}7=0.$$

X. Combien l'équation

$$\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x}{1+\frac{x^2}{3}}=0$$

a-t-elle de racines nulles?

Réponse : Cinq.

XI. 1° Combien l'équation

$$x-352\sin x-936\cos x=0$$

a-t-elle de racines réelles?

2° Réduire cette équation à la forme

$$ax'-b-\sin x'=0.$$

XII. Calculer la racine positive de l'équation

$$3.2^x+2.3^x=211.$$

(*) *Voir* p. 145.

CHAPITRE XXV.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

Préliminaires.

402. Une *fraction* $\frac{f(x)}{F(x)}$ est dite *rationnelle,* lorsque ses deux termes sont des polynômes entiers. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que la fraction a été réduite à sa *plus simple expression,* ou que $f(x)$ et $F(x)$ n'ont aucun facteur commun. Nous supposerons, en outre, le degré m du dénominateur supérieur au degré du numérateur. Si le contraire arrivait, on diviserait le numérateur par le dénominateur, et l'on mettrait la fraction sous la forme $Q+\frac{\varphi(x)}{F(x)}$, Q étant un polynôme entier, et $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ une nouvelle fraction satisfaisant à la condition énoncée.

Cas des facteurs inégaux.

403. Si l'on connaît les facteurs $x-a, x-b, x-c, \ldots, x-k, x-l$ de $F(x)$, ces facteurs étant d'abord supposés inégaux, on peut se proposer de décomposer $\frac{f(x)}{F(x)}$ en une somme de *fractions simples,* ayant pour numérateurs des *constantes* A, B, C, ..., K, L, et pour dénominateurs $x-a$, $x-b, x-c, \ldots, x-k, x-l$ (*); de manière à avoir, *quel que soit* x,

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\cdots+\frac{K}{x-k}+\frac{L}{x-l}. \qquad (1)$$

(*) Pour justifier cette tentative de décomposition, il suffit d'observer que la somme de m fractions $\frac{A}{x-a}, \frac{B}{x-b}, \ldots, \frac{L}{x-l}$, est une fraction ration-

La question consiste à déterminer, s'il est possible, les numérateurs A, B, ..., L.

404. *Première méthode.* — Si l'on multiplie les deux membres de l'égalité (1) par le dénominateur $F(x)$, le second membre devient un polynôme entier, *du degré* $m-1$, contenant les inconnues A, B, C, ... K, L *au premier degré,* et que l'on peut ordonner par rapport à x. D'ailleurs, le polynôme $f(x)$ est, au plus, du degré $m-1$. Si donc, pour *identifier* les deux membres de la nouvelle égalité, on égale les coefficients des mêmes puissances de x, on aura *m équations du premier degré, entre* m *inconnues.*

405. *Application.* — Soit

$$\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}.$$

Chassant les dénominateurs, et ordonnant le second membre, nous trouvons

$$x^2+1=(A+B+C)x^2+(A-C)x-B.$$

Par suite,

$$A+B+C=1,$$
$$A-C=0,$$
$$-B=1;$$

puis

$$B=-1,\quad A=C=1.$$

406. Le procédé que nous venons d'indiquer est connu sous le nom de *Méthode des coefficients indéterminés.* Très-

nelle dans laquelle le dénominateur est du degré m, et le numérateur, d'un degré inférieur à m. Par exemple,

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+1}{x(x^2-1)};$$

donc, réciproquement, cette dernière fraction est décomposable en fractions simples.

commode quand le dénominateur F (x) est du deuxième ou du troisième degré, il devient impraticable dès que le nombre des fractions simples cherchées surpasse cinq ou six. En outre, cette méthode est incomplète, parce qu'elle ne prouve ni la *possibilité de la décomposition essayée*, ni l'*impossibilité de toute autre décomposition :* en effet, rien ne démontre, *a priori*, que les inconnues A, B, ..., K, L seront finies et déterminées. Mais il est aisé de la modifier, de manière à la rendre simple et satisfaisante.

A cet effet, nous démontrerons d'abord la proposition suivante, dont les applications sont nombreuses.

407. Théorème. — *Deux polynômes* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$, *du degré* n, *qui deviennent égaux pour* n + 1 *valeurs de* x, *sont identiques.*

Soient

$$\varphi(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n,$$
$$\psi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

ces polynômes. S'ils n'étaient pas *identiques*, c'est-à-dire si l'on n'avait pas

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = a_1, \; \ldots, \quad A_n = a_n,$$

l'équation

$$(A_0 - a_0) x^n + (A_1 - a_1) x^{n-1} + \cdots + (A_n - a_n) = 0,$$

dont le degré est inférieur à $n + 1$, admettrait $n + 1$ racines; ce qui est absurde (**220**).

408. *Deuxième méthode.* — Reprenons l'égalité (1), après avoir multiplié les deux membres par F (x); nous aurons, en appelant $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_m(x)$ les quotients de F (x) par $x - a$, $x - b$, ..., $x - l$:

$$f(x) = AF_1(x) + BF_2(x) + \cdots + LF_m(x). \qquad (2)$$

D'après le théorème précédent, les polynômes composant les deux membres de la nouvelle égalité sont iden-

tiques, s'ils deviennent égaux pour m valeurs de x (*). Or, si l'on suppose $x=a$, les polynômes $F_2(x)$, $F_3(x)$, ..., $F_m(x)$ s'annulent, parce qu'ils contiennent le facteur $x-a$, et l'égalité devient

$$f(a) = AF_1(a).$$

Dès lors, les deux membres de l'égalité (2) sont égaux pour $x=a$, si l'on prend

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)}.$$

De même, l'hypothèse $x=b$ conduit à

$$B = \frac{f(b)}{F_2(b)};$$

et ainsi de suite. Par conséquent, *pour trouver le numérateur de la fraction* $\frac{G}{x-g}$ *correspondant à un facteur quelconque* $x-g$ *de* $F(x)$, *on divise* $F(x)$ *par* $x-g$; *et, en représentant par* $\varphi(x)$ *le quotient, on remplace* x *par* g *dans* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

400. *Remarques.* — I. Il résulte, du théorème ci-dessus, que si l'on donne aux coefficients A, B, ..., L les valeurs

$$\frac{f(a)}{F_1(a)},\quad \frac{f(b)}{F_2(b)},\ \ldots,\ \frac{f(l)}{F_m(l)},$$

déduites de cette règle, l'égalité (2) a lieu, quel que soit x. Il en est de même, évidemment, pour l'égalité (1). Donc *la décomposition proposée est possible.*

II. *La décomposition n'est possible que d'une seule manière.* Admettons, pour un instant, que la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ soit décomposable en

$$\frac{A'}{x-a'} + \frac{B'}{x-b'} + \frac{C'}{x-c'} + \cdots,$$

(*) On ne doit pas oublier que le second membre est du degré $m-1$, et le premier, du degré $m-1$ au plus.

un des dénominateurs $x-a'$, $x-b'$, $x-c'$, ..., au moins, différant de $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... : soit $x-a'$ ce nouveau dénominateur. On aurait

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots=\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots$$

Multiplions les deux membres par $x-a'$, puis faisons $x=a'$; nous trouvons $0=A'$; donc la fraction $\frac{A'}{x-a'}$ ne peut pas faire partie de la décomposition essayée. On prouverait, de la même manière, que l'on ne peut avoir

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A'}{x-a}+\frac{B'}{x-b}+\frac{C'}{x-c}+\cdots,$$

les numérateurs A', B', C', ... différant, en tout ou en partie, des premiers numérateurs A, B, C, ...

410. *Troisième méthode.* — Au moyen d'une remarque due à Euler, on peut se dispenser de diviser $F(x)$ par $x-a$, $x-b$, ..., $x-l$.

En effet, de l'identité

$$F(x)=(x-g)\varphi(x),$$

on conclut

$$F'(x)=(x-g)\varphi'(x)+\varphi(x);$$

et, en remplaçant x par g :

$$F'(g)=\varphi(g).$$

Par suite,

$$G=\frac{f(g)}{F'(g)}.$$

On peut donc modifier ainsi l'énoncé précédent :

Pour trouver les numérateurs des fractions $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{x-b}$, ..., *dans lesquelles se décompose* $\frac{f(x)}{F(x)}$, *on prend la fraction* $\frac{f(x)}{F'(x)}$, *et on y remplace* x, *successivement, par* a, b, c, ...

411. *Application.* — Soit

$$\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}.$$

On a

$$\frac{f(x)}{F'(x)}=\frac{x^2+1}{3x^2-1}.$$

Donc

$$A=\frac{1+1}{3-1}=1,\quad B=-1,\quad C=1;$$

comme ci-dessus (**403**).

Cas des facteurs égaux.

412. Supposons que le dénominateur $F(x)$ ait la forme $(x-a)^p F_1(x)$, $F_1(x)$ étant le produit des facteurs simples ou multiples de $F(x)$, autres que $x-a$.

Si l'on considère la fraction $\frac{f(x)}{(x-a)F_1(x)}$, on pourra, d'après ce qui précède, la décomposer comme il suit :

$$\frac{f(x)}{(x-a)F_1(x)}=\frac{A_p}{x-a}+\frac{f_1(x)}{F_1(x)},\qquad (3)$$

A_p étant une constante et $f_1(x)$ un polynôme entier. En effet, on aura d'abord (**408**), $A_p=\frac{f(a)}{F_1(a)}$; et, d'un autre côté,

$$f_1(x)=\frac{f(x)-A_pF_1(x)}{x-a}\qquad (4)$$

est un polynôme entier, attendu que $f(x)-A_pF_1(x)$ s'annule pour $x=a$ (**226**) (*).

(*) Le numérateur $f(x)$ peut être de degré plus élevé que le dénominateur $(x-a)F_1(x)$: cette circonstance n'influe en rien sur la possibilité de la décomposition indiquée.

On voit, en outre, au moyen de l'égalité (4), que la fraction $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$ est *irréductible*, ou que les polynômes $f_1(x)$, $F_1(x)$ sont premiers entre eux.

Cela étant, divisons par $(x-a)^{p-1}$ les deux membres de l'égalité (3); nous trouvons

$$\frac{f(x)}{(x-a)^p F_1(x)} = \frac{A^p}{(x-a)^p} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{p-1} F_1(x)}.$$

On voit donc que *la fraction proposée est décomposable en une fraction simple, de la forme* $\frac{A_p}{(x-a)^p}$, *et en une nouvelle fraction rationnelle, dont le dénominateur ne renferme plus que la puissance* (p — 1) *du facteur* x — a.

On peut raisonner sur celle-ci comme sur la fraction primitive, et l'on obtient, successivement :

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{p-1} F_1(x)} = \frac{A_{p-1}}{(x-a)^{p-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{p-2} F_1(x)},$$

$$\frac{f_2(x)}{(x-a)^{p-2} F_1(x)} = \frac{A_{p-2}}{(x-a)^{p-2}} + \frac{f_3(x)}{(x-a)^{p-3} F_1(x)},$$

. . . .

$$\frac{f_{p-1}(x)}{(x-a) F_1(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{f_p(x)}{F_1(x)}.$$

Par suite,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(x-a)^p} + \frac{f_p(x)}{F_1(x)}. \quad (5)$$

Ainsi, *la présence du facteur* $(x-a)^p$, *dans* F(x), *donne lieu à* p *fractions ayant pour numérateurs des constantes, et dont les dénominateurs sont* $x-a, (x-a)^2, \ldots (x-a)^p$. Il est bien entendu que, si $F_1(x)$ est divisible par $(x-b)^q$, on obtiendra, pareillement, des fractions

$$\frac{B_1}{x-b}, \quad \frac{B_2}{(x-b)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{B_q}{(x-b)^q};$$

et ainsi de suite.

Occupons-nous de la recherche des numérateurs A_1, $A_2, \ldots, A_p$.

413. *Première méthode.* — En multipliant les deux membres de l'égalité (5) par $F(x)$, et posant, pour abréger,

$$\Psi(x) = A_1(x-a)^{p-1} + A_2(x-a)^{p-2} + \cdots + A_{p-1}(x-a) + A_p, \quad (6)$$

nous trouvons

$$f(x) = \Psi(x) F_1(x) + (x-a)^p f_p(x);$$

puis, en prenant les $p-1$ premières dérivées :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Psi(x) F_1'(x) + \Psi'(x) F_1(x) + \text{etc. } (^*), \\ f''(x) &= \Psi(x) F_1''(x) + 2\Psi'(x) F_1'(x) + \Psi''(x) F_1(x) + \text{etc.}, \\ f'''(x) &= \Psi(x) F_1'''(x) + 3\Psi'(x) F_1''(x) + 3\Psi''(x) F_1'(x) \\ &\quad + \Psi'''(x) F_1(x) + \text{etc.}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dans les p égalités ainsi formées, remplaçons x par a; ces égalités se réduisent à :

$$\begin{aligned} f(a) &= \Psi(a) F_1(a), \\ f'(a) &= \Psi(a) F_1'(a) + \Psi'(a) F_1(a), \\ f''(a) &= \Psi(a) F_1''(a) + 2\Psi'(a) F_1'(a) + \Psi''(a) F_1(a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mais, par la formule (6) :

$$\Psi(a) = A_p, \quad \Psi'(a) = 1.A_{p-1}, \quad \Psi''(a) = 2.1.A_{p-2},$$
$$\Psi'''(a) = 3.2.1.A_{p-3}, \ldots;$$

donc, finalement :

$$\left.\begin{aligned} f(a) &= A_p F_1(a), \\ f'(a) &= A_p F_1'(a) + 1.A_{p-1} F_1(a), \\ f''(a) &= A_p F_1''(a) + 2.1.A_{p-1} F_1'(a) + 2.1.A_{p-2} F_1(a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

(*) Il est inutile de développer les dérivées de $(x-a)^p f_p(x)$, parce qu'elles s'annulent, aussi bien que cette fonction, pour $x = a$.

La première équation donne A_p, la deuxième, A_{p-1}; et ainsi de suite.

414. *Remarque.* — Le polynôme $F_1(x)$ ne contenant pas le facteur $x-a$, $F_1(a)$ est différent de zéro : les valeurs de A_p, A_{p-1}, A_{p-2}, ..., sont *finies et déterminées.* En outre, comme $f(a)$ n'est pas nul, la valeur de A_p est différente de zéro; donc *la fraction* $\frac{A_p}{(x-a)^p}$ *existe nécessairement.*

415. *Deuxième méthode.* — En multipliant par $(x-a)^p$ les deux membres de l'égalité (5), prenant les dérivées successives et faisant $x=a$, on trouve des équations que l'on peut écrire sous la forme abrégée

$$\frac{f}{F_1}=A_p,\quad \left(\frac{f}{F_1}\right)'=1.A_{p-1},\quad \left(\frac{f}{F_1}\right)''=2.1.A_{p-2},$$
$$\left(\frac{f}{F_1}\right)'''=3.2.1.A_{p-3},\ \ldots,$$

et qui font connaître, *séparément*, les numérateurs A_p, A_{p-1}, A_{p-2}, ... Malheureusement, le calcul des dérivées successives de la fraction $\frac{f(x)}{F_1(x)}$ est, presque toujours, fort compliqué.

416. *Troisième méthode.* — Dans

$$\frac{f(x)}{F_1(x)}=$$
$$A_p+A_{p-1}(x-a)+\cdots+A_1(x-a)^{p-1}+(x-a)^p\frac{f_1(x)}{F_1(x)},$$

remplaçons x par $a+z$: le second membre se transforme en

$$A_p+A_{p-1}z+A_{p-2}z^2+\cdots+A_1z^{p-1}+z^p\frac{f_1(a+z)}{F_1(a+z)}. \qquad (8)$$

D'un autre côté, en développant les deux termes de la

fraction $\frac{f(x)}{F_1(x)}$, par le Théorème de Taylor, nous pouvons la mettre sous la forme

$$\frac{f(a) + \frac{z}{1} f'(a) + \frac{z^2}{1.2} f''(a) + \cdots}{F_1(a) + \frac{z}{1} F_1'(a) + \frac{z^2}{1.2} F_1''(a) + \cdots}$$

Cela fait, divisons le numérateur de la nouvelle fraction par le dénominateur, en ordonnant le quotient par rapport aux puissances croissantes de z, et en limitant ce quotient au terme en z^{p-1} : nous aurons, au lieu de la fraction $\frac{f(x)}{F_1(x)}$, une expression

$$B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \cdots + B_{p-1} z^{p-1} + \frac{z^p F(z)}{F_1(a+z)}, \qquad (9)$$

$F(z)$ étant un polynôme entier. Identifiant les développements (8) et (9), nous trouvons

$$A_p = B_0, \quad A_{p-1} = B_1, \ldots, \quad A_1 = B_{p-1} \; (*).$$

Ainsi, *les numérateurs des fractions*

$$\frac{A_p}{(x-a)^p}, \quad \frac{A_{p-1}}{(x-a)^{p-1}}, \ldots, \quad \frac{A_1}{x-a}$$

sont les coefficients successifs du quotient de $f(a+z)$ *par* $F_1(a+z)$, *ordonné suivant les puissances croissantes de* z.

417. *Quatrième méthode.* — Reprenons l'égalité (5), mise sous la forme

$$f(x) = F_1(x)\{A_p + A_{p-1}(x-a) + \cdots + A_1(x-a)^{p-1}\} + \varphi(x)(x-a)^p.$$

(*) Les fonctions (8), (9) sont deux développements de la fraction $\frac{f(x)}{F_1(x)}$; donc elles doivent être égales, quelle que soit la valeur attribuée à z. Si l'on fait $z=0$, elles se réduisent à A_p et à B_0; car F_1 est différent de zéro; donc $A_p = B_0$. Retranchant membre à membre, supprimant le facteur commun z, et faisant $z=0$, on trouve $A_{p-1} = B_1$; etc. Absolument comme si les fonctions étaient entières (**407**).

1° Remplaçant x par a, nous trouvons

$$A_p = \frac{f(a)}{F_1(a)},$$

comme précédemment.

2° Si l'on transpose $A_p F_1(x)$, le second membre est divisible par $x - a$; le premier membre jouit donc de la même propriété; et, en conséquence,

$$A_{p-1} = \frac{Q_1(a)}{F_1(a)},$$

$Q_1(x)$ représentant le quotient de $f(x) - A_p F_1(x)$ par $x - a$.

3° De même, si l'on fait

$$Q_2(x) = \frac{Q_1(x) - A_{p-1} F_1(x)}{x - a},$$

on a

$$A_{p-2} = \frac{Q_2(a)}{F_1(a)};$$

et ainsi de suite.

418. *Remarque.* — Ces diverses méthodes doivent donner les mêmes valeurs pour les inconnues $A_p, A_{p-1}, \ldots, A_1$; car *la décomposition de la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ n'est possible que d'une seule manière* (*).

419. *Application. — Décomposer $\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-1)^3}$ en fractions simples.*

Nous nous occuperons seulement des fractions correspondant au facteur $(x-1)^3$ du dénominateur.

Première méthode.

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-1)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \text{etc.};$$

(*) Cette proposition se démontre, dans le cas général, à très-peu près comme dans le cas particulier où $F(x)$ n'a que des facteurs simples. Nous laissons au lecteur le soin de développer la démonstration.

$$x^2+x-1=\left[A_1(x-1)^2+A_2(x-1)+A_3\right](x^2+x)+\text{etc.};$$
$$2x+1=\left[A_1(x-1)^2+A_2(x-1)+A_3\right](2x+1)$$
$$+\left[2A_1(x-1)+A_2\right](x^2+x)+\text{etc.};$$
$$2=2\left[A_1(x-1)^2+A_2(x-1)+A_3\right]$$
$$+2\left[2A_1(x-1)+A_2\right](2x+1)$$
$$+2A_1(x^2+x)+\text{etc.}$$

Pour $x=1$, ces trois égalités se réduisent à

$$1=2A_3,\quad 3=3A_3+2A_2,\quad 2=2A_3+6A_2+4A_1;$$

donc

$$A_3=\frac{1}{2},\quad A_2=\frac{3}{4},\quad A_1=-\frac{7}{8}.$$

Deuxième méthode.

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-1)^3}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\text{etc.};$$
$$\frac{x^2+x-1}{x^2+x}=A_1(x-1)^2+A_2(x-1)+A_3+\text{etc.};$$
$$\frac{(x^2+x)(2x+1)-(x^2+x-1)(2x+1)}{(x^2+x)^2}=2A_1(x-1)+A_2+\text{etc.},$$

ou

$$\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}=2A_1(x-1)+A_2+\text{etc.};$$
$$\frac{(x^2+x)^2\,2-(2x+1)\,2\,(x^2+x)\,2x+1}{(x^2+x)^4}=2A_1+\text{etc.},$$

ou

$$2\,\frac{x^2+x-(2x+1)^2}{(x^2+x)^3}=2A_1+\text{etc.}$$

Faisant $x=1$, nous trouvons

$$A_3=\frac{1}{2},\quad A_2=\frac{3}{4},\quad A_1=-\frac{7}{8}.$$

Troisième méthode. — En remplaçant x par $1+z$ dans $\frac{x^2+x-1}{x^3+x}$, on a d'abord $\frac{1+3z+z^2}{2+3z+z^2}$. Par la division, on transforme cette fraction en

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z-\frac{7}{8}z^2+\frac{\frac{15}{8}z^3+\frac{7}{8}z^4}{2+3z+z^2}.$$

Donc

$$A_3=\frac{1}{2},\quad A_2=\frac{3}{4},\quad A_1=-\frac{7}{8}.$$

Quatrième méthode.

$$x^2+x-1=(x^3+x)\left[A_3+A_2(x-1)+A_1(x-1)^2\right]+\cdots;$$

$$A_3=\frac{1}{2}.$$

$$Q_1(x)=\frac{x^2+x-1-\frac{1}{2}(x^2+x)}{x-1}=\frac{x+2}{2};\quad Q_1(1)=\frac{3}{2};$$

$$A_2=\frac{3}{4}.$$

$$Q_2(x)=\frac{\frac{x+2}{2}-\frac{3}{4}(x^2+x)}{x-1}=-\frac{3x+4}{4};$$

$$A_1=-\frac{7}{8}.$$

Cas des facteurs imaginaires.

420. Dans ce qui précède, rien ne fait supposer que les racines de l'équation $F(x)=0$ soient toutes réelles. Si, parmi ces racines, il s'en trouve d'imaginaires, les facteurs correspondants auront la forme $(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^r$, et donneront lieu à des fractions

$$\frac{A_1}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}},\quad\frac{A_2}{(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^2},\ \cdots$$

dont les numérateurs seront imaginaires

En admettant que les polynômes $f(x)$, $F(x)$ aient tous leurs coefficients réels, on peut, ainsi qu'il suit, faire disparaître les imaginaires, ou plutôt se dispenser de les introduire dans le calcul.

421. *Facteurs imaginaires simples.* — Considérons d'abord le cas où l'équation $F(x) = 0$ admet une racine imaginaire simple, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. Puisque cette équation a ses coefficients réels, elle admet la racine conjuguée $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ (**282**). Nous aurons donc

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{B}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)},$$

en désignant par $F_1(x)$ le quotient de $F(x)$ par $(x-\alpha)^2+\beta^2$. De plus (**408**),

$$A = \frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})}, \quad B = \frac{f(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha-\beta\sqrt{-1})}.$$

Enfin, si l'on réduit A la forme $\mu + \nu\sqrt{-1}$ (**205**), la valeur de B sera $\mu - \nu\sqrt{-1}$. Nous pouvons donc écrire, au lieu des fractions simples considérées tout à l'heure,

$$\frac{\mu+\nu\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{\mu-\nu\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$
$$= 2\frac{\mu(x-\alpha)+\nu\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

M et N étant des constantes réelles.

Par conséquent, *la somme des fractions simples, correspondant aux facteurs conjugués*

$$x-\alpha-\beta\sqrt{-1}, \quad x-\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

est une fraction qui a pour numérateur un binôme du premier degré, à coefficients réels, et pour dénominateur le trinôme $(x-\alpha)^2+\beta^2$.

422. *Facteurs imaginaires multiples.* — De

$$\frac{f(x)}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]F_1(x)}=\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{f_1(x)}{F_1(x)},\qquad(10)$$

on conclut, absolument comme au n° **412** :

$$\left.\begin{aligned}\frac{f(x)}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^pF_1(x)}&=\frac{M_px+N_p}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^p}\\&+\frac{M_{p-1}x+N_{p-1}}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^{p-1}}+\dots+\frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{\varphi(x)}{F_1(x)},\end{aligned}\right\}(11)$$

M_p, N_p, M_{p-1}, N_{p-1}, ... étant des coefficients réels.

423. *Calcul des coefficients.* — On l'effectuera par la première méthode (**413**); c'est-à-dire qu'après avoir multiplié, par $\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^pF_1(x)$, les deux membres de l'égalité (11), on prendra les $p-1$ premières dérivées (*), en négligeant le terme

$$\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^p\frac{\varphi(x)}{F_1(x)};$$

et, dans les p équations ainsi formées, on fera

$$x=\alpha+\beta\sqrt{-1}:$$

cette substitution donne $2p$ équations, d'où l'on conclut, successivement, M_p, N_p, puis M_{p-1}, N_{p-1}, puis M_{p-2}, N_{p-2},... Ordinairement, ce calcul est très-prolixe.

424. *Application.* — Soit

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{1}{(x^2+1)^5(x^2+x+1)^2}.$$

(*) Il est bien entendu que si $p=1$, l'égalité (10) suffit.

La fraction doit se décomposer en

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+1)^3}$$
$$+\frac{P_1x+Q_1}{x^2+x+1}+\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+x+1)^2}.$$

Pour déterminer les numérateurs des trois premières fractions simples, nous avons d'abord

$$1=\Psi(x)(x^2+x+1)^2+\text{etc.},$$

en posant

$$\Psi(x)=(M_1x+N_1)(x^2+1)^2+(M_2x+N_2)(x^2+1)+M_3x+N_3;$$

puis, en prenant les deux premières dérivées :

$$0=2\Psi(x)(x^2+x+1)(2x+1)+\Psi'(x^2+x+1)^2+\text{etc.},$$
$$0=2\Psi(x)\left[2(x^2+x+1)+(2x+1)^2\right]$$
$$+4\Psi'(x)(x^2+x+1)(2x+1)+\Psi''(x)(x^2+x+1)^2+\text{etc.}$$

D'ailleurs,

$$\Psi'(x)=4(M_1x+N_1)(x^2+1)x+M_1(x^2+1)^2$$
$$+2(M_2x+N_2)x+M_2(x^2+1)+M_3,$$
$$\Psi''(x)=4(M_1x+N_1)(3x^2+1)$$
$$+6M_1(x^2+1)x+2(M_2x+N_2)+4M_2x.$$

Si actuellement nous remplaçons x par $\sqrt{-1}$, nous déduirons, des six dernières relations, les équations suivantes :

$$1=-(M_3\sqrt{-1}+N_3),$$
$$0=2(M_3\sqrt{-1}+N_3)\sqrt{-1}(2\sqrt{-1}+1)$$
$$-2(M_2\sqrt{-1}+N_2)\sqrt{-1}-M_3,$$
$$0=2(M_3\sqrt{-1}+N_3)\left[2\sqrt{-1}+(2\sqrt{-1}+1)^2\right]$$
$$+4\left[2(M_2\sqrt{-1}+N_2)\sqrt{-1}+M_3\right]\sqrt{-1}(2\sqrt{-1}+1)$$
$$+8(M_1\sqrt{-1}+N_1)-2(M_2\sqrt{-1}+N_2)-4M_2\sqrt{-1},$$

d'où l'on tire enfin :

$$M_3=0,\ N_3=-1,\ M_2=-2,\ N_2=-1,\ M=-4,\ N_1=2.$$

On trouve, par un calcul semblable :

$$P_2=0,\quad Q_2=-1,\quad P_1=4,\quad Q_1=2.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{(x^2+1)^3(x^2+x+1)^2}=-2\frac{2x-1}{x^2+1}-\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{(x^2+1)^3}$$
$$+2\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{(x^2+x+1)^2}.$$

125. *Autre méthode.* — Soit, pour abréger,

$$(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2+ax+b.$$

1° L'égalité (11) peut être écrite ainsi :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{f(x)-F_1(x)(M_px+N_p)}{x^2+ax+b}= \\ F_1(x)\left[M_{p-1}x+N_{p-1}+(M_{p-2}x+N_{p-2})(x^2+ax+b)+\cdots\right. \\ \left.+(M_1x+N_1)(x^2+ax+b)^{p-2}\right]+(x^2+ax+b)^{p-1}f_1(x).\end{array}\right\}(12)$$

Le second membre est un polynôme entier Q_1. Si donc M_p, N_p ont des valeurs *convenables*, le premier membre doit se réduire à Q_1. Effectuant la division, on trouve

$$\frac{f(x)-F_1(x)(M_px+N_p)}{x^2+ax+b}=Q_1+\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b}.$$

Par conséquent, les coefficients M_p, N_p sont déterminés par les équations du *premier degré* :

$$A_1=0,\quad B_1=0.$$

2° L'égalité (12) devient

$$\frac{Q_1 - F_1(x)(M_{p-1}x + N_{p-1})}{x^2 + ax + b} =$$
$$F_1(x)\left[M_{p-2}x + N_{p-2} + \cdots + (M_1x + N_1)(x^2 + ax + b)^{p-3}\right]$$
$$+ (x^2 + ax + b)^{p-2}\varphi(x).$$

Répétant le même raisonnement et le même calcul, on voit que si l'on trouve

$$\frac{Q_1 - F_1(x)(M_{p-1}x + N_{p-1})}{x^2 + ax + b} = Q_2 + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + ax + b},$$

les coefficients M_{p-1}, N_{p-1} sont donnés par les équations

$$A_2 = 0, \quad B_2' = 0;$$

etc.

426. *Application.* — Reprenons l'égalité

$$1 = (x^2 + x + 1)^2\left[M_3x + N_3 + (M_2x + N_2)(x^2 + 1)\right.$$
$$\left. + (M_1x + N_1)(x^2 + 1)^2\right] + \cdots,$$

considérée ci-dessus.

1° La fraction

$$\frac{1 - (x^2 + x + 1)^2(M_3x + N_3)}{x^2 + 1}$$
$$= -(x + 1)^2(M_3x + N_3) + \frac{1 - x^2(M_3x + N_3)}{x^2 + 1}$$
$$= -(x + 1)^2(M_3x + N_3) - (M_3x + N_3) + \frac{1 + M_3x + N_3}{x^2 + 1}.$$

Pour qu'elle se réduise au polynôme

$$Q_1 = -(x + 1)^2(M_3x + N_3) - (M_3x + N_3),$$

on doit prendre $M_3 = 0$, $N_3 = -1$.

Il résulte, de ces valeurs,

$$Q_1 = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2.$$

2° La fraction

$$\frac{x^2 + 2x + 2 - (x^2 + x + 1)^2 (M_2 x + N_2)}{x^2 + 1}$$

$$= 1 - (x+1)^2 (M_2 x + N_2) + \frac{2x + 1 - x^2 (M_2 x + N_2)}{x^2 + 1}$$

$$= 1 - (x+1)^2 (M_2 x + N_2) - (M_2 x + N_2) + \frac{2x + 1 + M_2 x + N_2}{x^2 + 1}.$$

Elle se réduit à

$$Q_2 = 1 - \left[(x+1)^2 + 1\right] (M_2 x + N_2),$$

si l'on suppose

$$M_2 = -2, \quad N_2 = -1.$$

Par suite,

$$Q_2 = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 3.$$

3° La fraction

$$\frac{2x^3 + 5x^2 + 6x + 3 - (x^2 + x + 1)^2 (M_1 x + N_1)}{x^2 + 1}$$

$$= 2x + 5 - (x+1)^2 (M_1 x + N_1) + \frac{4x - 2 - x^2 (M_1 x + N_1)}{x^2 + 1}$$

$$= 2x + 5 - \left[(x+1)^2 + 1\right](M_1 x + N_1) + \frac{4x - 2 + M_1 x + N_1}{x^2 + 1}.$$

Conséquemment,

$$M_1 = -4, \quad N_1 = 2 \; (*).$$

(*) Les calculs précédents, et tous ceux qu'exige la décomposition d'une fraction rationnelle quelconque, sont susceptibles de simplifications nombreuses, dans le détail desquels nous ne pouvons entrer; le lecteur les apercevra facilement.

427. *Remarque.* — Au lieu d'opérer conformément aux principes exposés ci-dessus, il est souvent plus commode de recourir à la *méthode des coefficients indéterminés* (**406**), surtout quand l'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires. Soit, par exemple, la fraction $\frac{1}{x^4+1}$. Après avoir décomposé le dénominateur en

$$(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1),$$

on pose

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Mx + N}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{Px + Q}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}.$$

Chassant les dénominateurs, et identifiant les deux membres, on a

$$0 = M + P, \quad 0 = N + Q + (P - M)\sqrt{2},$$
$$0 = M + P + (Q - N)\sqrt{2}, \quad 1 = N + Q;$$

ou, plus simplement,

$$M + P = 0, \quad M - P = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N - Q = 0, \quad N + Q = 1.$$

Ces équations donnent

$$M = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad P = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad N = Q = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\right).$$

Exercices.

I. Théorème. — *En représentant par* a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_{n-2}, *des quantités quelconques, on a, identiquement,*

$$\sum_1^n \frac{(a_p - b_1)(a_p - b_2)\ldots(a_p - b_{n-2})}{(a_p - a_1)(a_p - a_2)\ldots(a_p - a_n)} = 0\ (^*).$$

II. Théorème. — *Soient* a, b, c, ... k, l *des quantités quelconques, inégales; et soit*

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l):$$

1° $$\frac{a^{n-2}}{f'(a)} + \frac{b^{n-2}}{f'(b)} + \cdots + \frac{l^{n-2}}{f'(l)} = 0;$$

2° $$\frac{a^{n-1}}{f'(a)} + \frac{b^{n-1}}{f'(b)} + \cdots + \frac{l^{n-1}}{f'(l)} = 1;$$

3° $$\sum \frac{a^{n+p-1}}{f'(a)} = \sum a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda,$$

les exposants α, β, γ, ... λ *étant déterminés par l'équation*

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda = p\ (^{**}).$$

III. Théorème. — *Soit* $\mathrm{f(x)} = (\mathrm{x} - \mathrm{a})(\mathrm{x} - \mathrm{b})\ldots(\mathrm{x} - \mathrm{l})$: *le reste de la division de* F (x), *par* f (x), *est*

$$f(x)\sum \frac{\mathrm{F}(a)}{(x-a)f'(a)}.$$

(*) Il est évident que le dénominateur ne doit pas contenir le facteur $a_p - a_p$.

(**) Par exemple, la *fonction fractionnaire*

$$\frac{a^5}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^5}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^5}{(c-a)(c-b)}$$

est *identiquement égale* à la *fonction entière*

$$a^3 + b^3 + c^3 + (b+c)a^2 + (c+a)b^2 + (a+b)c^2 + abc.$$

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

I.

INFINIMENT PETITS ET DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE I.

DES INFINIMENT PETITS.

Définitions.

1. On appelle INFINIMENT PETIT *une quantité variable, très-petite, qui a pour limite zéro* (*).

2. Si plusieurs infiniment petits, α, β, γ, ... dépendent les uns des autres, on donne le nom d'*infiniment petit principal* à celui que l'on regarde comme arbitraire.

3. Si les rapports $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, ... ont des limites finies, différentes de zéro, les quantités β, γ, ... sont considérées comme étant du *premier ordre*.

(*) On devrait dire : *quantité* INDÉFINIMENT *petite*. Cette dénomination, souvent attribuée à Cauchy, était connue dès 1702, comme le prouve le titre suivant : *Essai d'une méthode pour trouver les touchantes des courbes mécaniques, sans supposer aucune grandeur* INDÉFINIMENT *petite, par M. de Tschirnhausen.*

4. En général, $\frac{\beta}{\alpha^n}$ ayant pour limite une quantité finie k, différente de zéro, on dit que β *est de l'ordre* n.

5. Plus généralement, si α, β, γ, ... sont du premier ordre, *le produit* des n facteurs α, β, γ, ... *est de l'ordre* n.

6. *Applications.* — 1° Un rectangle, dont les côtés α, β sont du premier ordre, est du deuxième ordre.

2° Soit x un arc infiniment petit principal : alors $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ sont du premier ordre, parce que $\frac{\sin x}{x}$ et $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ont pour limite l'unité; mais $1 - \cos x$ est du deuxième ordre; car

$$\lim \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

3° On sait que, x étant un petit arc, on a

$$0 < x - \sin x < \frac{1}{6} x^3,$$

ou

$$0 < \frac{x - \sin x}{x^3} < \frac{1}{6}.$$

De là résulte que le rapport $\frac{x - \sin x}{x^3}$ tend vers une limite qui ne surpasse pas $\frac{1}{6}$: on peut même démontrer qu'elle est égale à $\frac{1}{6}$. Donc $x - \sin x$ *est infiniment petit du troisième ordre.*

Substitution des infiniment petits.

7. Théorème I. — *La limite du rapport entre deux infiniment petits de même ordre, α, β, est égale à la limite du rapport entre deux infiniment petits α_1, β_1, qui diffèrent des premiers, de quantités infiniment petites, α_2, β_2, d'un ordre supérieur à celui de α, β.*

En effet, de

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2,$$

on tire

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \frac{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}{1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}};$$

puis, à cause de

$$\lim \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0, \quad \lim \frac{\beta_2}{\beta_1} = 0:$$

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

8. Corollaire. — α, β étant, par exemple, du premier ordre,

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \lim \frac{\mathrm{l}(1 + \alpha)}{\mathrm{l}(1 + \beta)}; \text{ etc.}$$

9. Théorème II. — *La limite de la somme de quantités positives, infiniment petites, dont le nombre augmente indéfiniment, est égale à la limite de la somme d'autres quantités infiniment petites, dont les rapports avec les premières ont respectivement pour limite l'unité.*

Soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \ldots, \alpha_n$$

les premiers infiniment petits; et

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \ldots, \beta_n$$

les seconds, tels que les rapports

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\beta_n},$$

aient tous pour limite l'unité. D'après un théorème connu, la fraction

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}$$

est comprise entre la plus grande et la plus petite des fractions précédentes; donc elle a pour limite l'unité.

10. Théorème III. — *Dans la recherche d'une limite de rapport ou d'une limite de somme, on peut substituer l'un à l'autre deux infiniment petits, α, β, quand leur rapport a pour limite l'unité.*

Ce théorème est évident par les deux premiers, dont il est le résumé.

Applications géométriques.

11. Théorème IV. — *La différence entre un arc infiniment petit* ACM *et sa corde* AM, *est un infiniment petit d'un ordre supérieur.*

Soient a, c les longueurs de ces deux lignes. Si la différence $a - c$ n'avait pas la forme $a\varepsilon$, ε étant infiniment petit, il en résulterait

$$a - c > ak, \tag{1}$$

k étant un nombre constant, supérieur à zéro. Appliquant cette inégalité aux diverses parties d'un arc fini ACC′C″B, on aurait donc

$$a - c > ak, \quad a' - c' > a'k, \quad a'' - c'' > a''k, \ldots;$$

d'où

$$\mathrm{A} - \mathrm{P} > \mathrm{A}k,$$

A étant *la longueur de* ACC′C″B, et P le périmètre de la

ligne brisée AMM'B. Cette dernière inégalité est absurde; car, *par définition*, A = lim P (*). Donc l'inégalité (1) est fausse; et l'on a

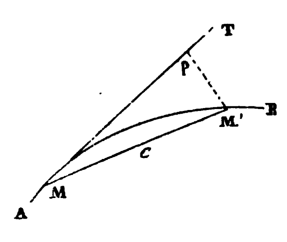
$$a - c = a\varepsilon,$$

ou

$$\lim \frac{c}{a} = 1.$$

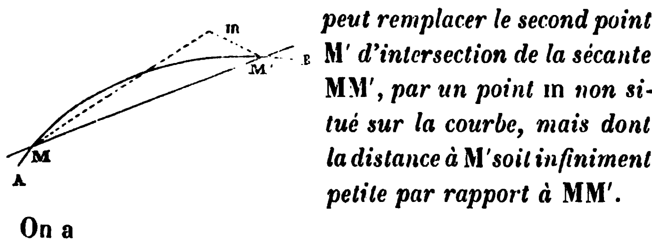
12. *Remarque.* — L'équation $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$ est comprise dans le théorème précédent.

13. Théorème V. — *La distance comprise entre l'une des extrémités d'un arc infiniment petit et la tangente menée à l'autre extrémité, est un infiniment petit d'un ordre supérieur.*



En effet, $M'p = c \sin M'MT$; et les deux facteurs du second membre sont infiniment petits.

14. Théorème VI. — *Dans la recherche de la tangente, on peut remplacer le second point M' d'intersection de la sécante MM', par un point m non situé sur la courbe, mais dont la distance à M' soit infiniment petite par rapport à MM'.*



On a

$$\sin M = \frac{mM'}{MM'} \sin m;$$

et, d'après l'hypothèse, $\lim \frac{mM'}{MM'} = 0$; donc

$$\lim \sin M = 0.$$

(*) *Éléments de Géométrie*, 2e édit., pp. 169 et suivantes.

Ainsi, *à la limite*, les directions Mm, MM′ coïncident : chacune d'elles se confond avec la direction de la tangente en M.

15. Théorème VII. — *Si une courbe* C′ *est déduite d'une courbe* C, *de manière qu'à chaque point* M *de celle-ci corresponde un point* P *de la première ; la distance entre deux points* M, M′ *de* C, *et la distance entre les points correspondants de* C′, *sont du même ordre.*

Soient x, y, X, Y les coordonnées des points M, P : y, X, Y sont des fonctions de x. Les coordonnées de M′ sont $x+\Delta x$, $y+\Delta y$; et les coordonnées de M′ : X+ΔX, Y + Δy.

De plus, les axes étant supposés rectangulaires :

$$\overline{MM'}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \quad \overline{PP'}^2 = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2.$$

D'après des formules connues (Alg., 122) :

$$\Delta y = \Delta x\,(y' + \varepsilon), \quad \Delta X = \Delta x\,(X' + \varepsilon_1), \quad \Delta Y = \Delta x\,(Y' + \varepsilon_2);$$

y', X′, Y′ désignant des dérivées, et ε, ε_1, ε_2 des infiniment petits.

On conclut, de ces diverses valeurs,

$$\left(\frac{PP'}{MM'}\right)^2 = \frac{(X' + \varepsilon_1)^2 + (Y' + \varepsilon_2)^2}{1 + (y'^2 + \varepsilon)^2};$$

puis

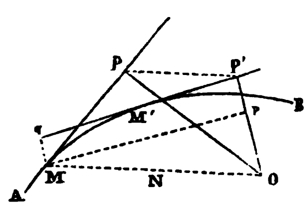
$$\lim \frac{PP'}{MM'} = \sqrt{\frac{X'^2 + Y'^2}{1 + y'^2}}.$$

Ainsi, *la limite du rapport entre* PP′ *et* MM′ *est une quantité finie, différente de zéro ;* ce qu'il fallait démontrer (*).

(*) C'est seulement pour des points particuliers que les dérivées X′, Y′, y' deviendraient infinies ou nulles.

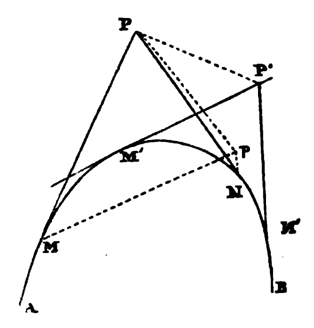
Applications.

16. Problème I. — *Trouver la tangente en un point* P *du lieu des projections d'un point donné,* O, *sur les tangentes à une courbe donnée* AB. (Ce lieu est ce qu'on appelle la *podaire* de AB, relativement au pôle O) (*).



La tangente en P est la limite de la sécante PP'. Mais, d'après le Théorème VI, on peut remplacer le point P' par un autre point dont la distance à P' soit infiniment petite, relativement à PP' ou à MM' (Th. VII). A cet effet, menons Mp parallèle à M'P' : pP' = Mq est infiniment petit par rapport à MM' et PP' (**13**). Or, les points P, p sont situés sur la circonférence qui aurait MO pour diamètre; donc la tangente cherchée se confond avec la tangente à cette circonférence. De là, cette propriété remarquable : *la normale en* P, *à la podaire, passe au milieu* N *de* MO.

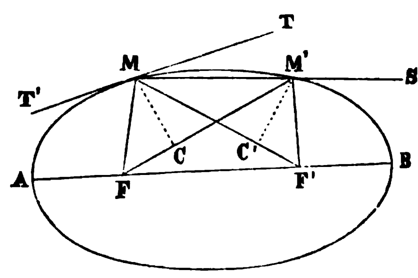
17. Problème II. — *Trouver la tangente au point* P *du lieu décrit par le sommet d'un angle* MPN, *circonscrit à une courbe* AB.



En menant Mp parallèle à M'P', Np parallèle à N'P', on pourra substituer le point p au point P'. Donc *la tangente en* P, *limite commune de* PP' *et de* Pp, *se confond avec la tangente à la circonférence circonscrite au triangle* MNP.

(*) Réciproquement, AB est l'*anti-podaire* de l'autre courbe.

18. Problème III. — *Construire la tangente* TMT′ *en un point* M *d'une ellipse* AB, *dont les foyers sont* F, F′.



Menons la sécante MM′S, puis les rayons vecteurs FM, FM′, F′M, F′M′.

Par la définition de l'ellipse,

$$FM + F'M = FM' + F'M',$$

ou

$$F'M - F'M' = FM' - FM.$$

Les angles en F et en F′ sont infiniment petits; si donc l'on abaisse MC perpendiculaire à FM′, M′C′ perpendiculaire à F′M, les projections FC, F′C′, des rayons vecteurs FM, F′M′, ne diffèrent, de ceux-ci, que de quantités du deuxième ordre (**6**, 2°); donc l'égalité précédente peut être remplacée par

$$F'M - F'C' = FM' - FC,$$

ou

$$MC' = M'C.$$

Conséquemment, les triangles rectangles MC′M′, M′CM′ sont égaux (*); de même que les angles aigus C′MM′, CM′M. Ainsi

$$\lim F'MM' = \lim FM'M,$$

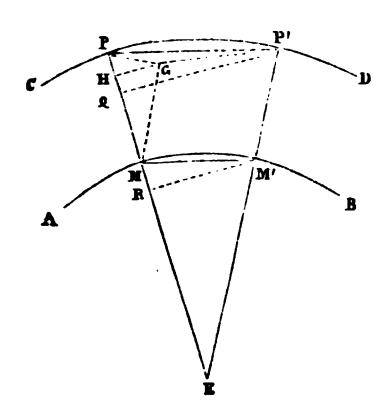
ou

$$F'MT = FMT';$$

propriété connue.

(*) C'est-à-dire, *tendent à devenir égaux.*

19. PROBLÈME IV. — *Sur la normale* ME *à une courbe* AB, *on porte, à partir du point* M, *une longueur constante* MP=a; *ce qui détermine une courbe* CD. *Quelle est la tangente, en* P, *à cette ligne?*



M'E étant la normale en M', traçons les cordes MM', PP' : il s'agit de trouver vers quelle limite tend la direction PP'. Menons MG égale et parallèle à M'P' : MGP'M' est un parallélogramme; donc GP' est égale et parallèle à MM'. Si l'on projette, sur PE, ces dernières droites, on a HQ = MR, ou

$$PQ - PH = MR.$$

D'après le Th. IV, PH et MR sont, au moins, du deuxième ordre : il en est donc de même de PQ, tandis que PP' est du premier ordre (Th. VII). Et comme

$$\cos EPP' = \frac{PQ}{PP'};$$

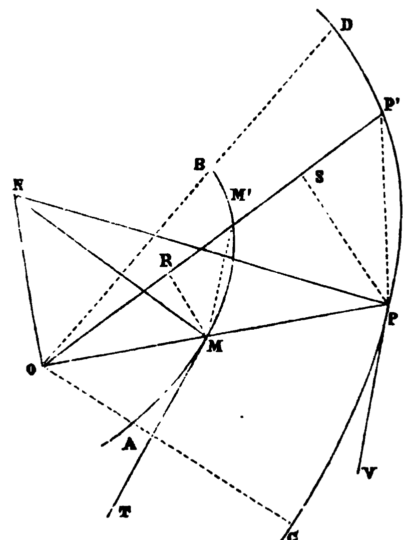
$\lim \cos EPP' = 0$, ou

$$\lim EPP' = 1^d.$$

Ainsi, MP *est une normale commune à* AB, CD. Pour cette raison, on dit que ces deux courbes sont *parallèles*.

20. PROBLÈME V. — *D'un point donné* O, *l'on mène, à une courbe donnée* AB, *un rayon vecteur* OM, *sur lequel on prend* MP *égal à une droite donnée,* a : *le lieu du point* P

est une courbe CD, *appelée* CONCHOÏDE *de* AB (*). *Cela posé, on propose de construire la tangente, en* P, *à la conchoïde.*



Menons la droite OM'P', les cordes MM', PP'; puis projetons les points M, P, sur OM'P', en R, S. Dans les triangles rectangles PSP', MRM':

$$\operatorname{tg} P' = \frac{PS}{SP'},$$

$$\operatorname{tg} M' = \frac{MR}{RM'};$$

ou, en négligeant des infiniment petits du deuxième ordre (Th. I) :

$$\operatorname{tg} P' = \frac{PS}{OP' - OP}, \quad \operatorname{tg} M' = \frac{MR}{OM' - OM}.$$

Mais, à cause de $OP = OM + a$, $OP' = OM' + a$:

$$OP' - OP = OM' - OM;$$

donc

$$\frac{\operatorname{tg} P'}{\operatorname{tg} M'} = \frac{PS}{MR} = \frac{OP}{OM};$$

ou, par le Théorème I :

$$\operatorname{tg} OPV = \frac{OP}{OM} \operatorname{tg} OMT.$$

(*) Par analogie avec la *conchoïde* ordinaire (*Manuel des Candidats*, tome II, p. 326). Observez que la courbe AB, *directrice* de CD, est une conchoïde de CD.

Soient MN la normale à AB, et ON perpendiculaire au rayon vecteur OMP. On a

$$\operatorname{tg} \mathrm{OMT} = \operatorname{tg} \mathrm{ONM} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON}};$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$\operatorname{tg} \mathrm{OPV} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{ON}} \operatorname{tg} \mathrm{ONP}.$$

Ainsi, *les angles* OPV, ONP *sont égaux*. Et comme OP est perpendiculaire à ON, PV *est perpendiculaire à* OP. On a donc ce théorème :

Les normales aux points correspondants M, P, *et la perpendiculaire à* OMP, *menée par le pôle* O, *se coupent en un même point* N.

Ce point étant déterminé par les données de la question, on trace NP, puis PV perpendiculaire à NP : PV est la tangente demandée.

Exercices.

I. Théorème. — *Si* h *est un infiniment principal, la quantité*

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

est infiniment petite du deuxième ordre.

II. Vérifier, au moyen des propositions démontrées ci-dessus (Prob. I, II), les propriétés suivantes :

La podaire de l'ellipse, par rapport à un foyer, est la circonférence décrite sur le grand axe, comme diamètre;

La podaire de la parabole, par rapport au foyer, est la tangente au sommet;

Le lieu du sommet d'un angle droit, circonscrit à l'ellipse, est une circonférence.

III. Construire, par points, l'anti-podaire d'une courbe donnée.

IV. Anti-podaire de l'ellipse, le pôle étant au centre (*).

V. Théorème. — 1° *Les anti-podaires d'une suite de conchoïdes ayant même directrice et même pôle, sont des courbes parallèles;*

2° *Les podaires d'une suite de courbes parallèles sont des conchoïdes.*

VI. Théorème. — *Si une courbe* ACB *roule sur une ligne fixe* DCE, *en entraînant un point* M; *la normale, en* M, *à la* ROULETTE *décrite par ce point, passe par le point de contact* C *des deux courbes données.*

VII. Théorème. — *Si une droite finie* AA′ *s'appuie, par ses deux extrémités, sur deux lignes* CD, C′D′, *en entraînant un point* M; *la normale, en* M, *à la ligne décrite par ce point, passe par le point de concours des normales en* A, A′, *aux directrices* CD, C′D′. (Chasles.)

VIII. Théorème. — *Si une droite* D *se meut dans un plan, les tangentes, aux* TRAJECTOIRES *des points de* D, *sont tangentes à une parabole.* (Chasles.)

IX. Théorème. — *Si une courbe* C *se meut dans un plan, les tangentes, aux trajectoires des points de* C, *sont tangentes à une anti-podaire de* C.

X. Théorème. — *Lorsqu'une courbe* ACB *roule sur une droite fixe* DCE, *en entraînant un point* M, *la roulette décrite par ce point a même longueur que la podaire de ce même point* M, *relative à la courbe mobile.* (Steiner.)

(*) L'équation de cette courbe, trouvée par Tortolini, est

$$[4(a^4 - a^2b^2 + b^4) - 3(a^2x^2 + b^2y^2)]^3 =$$
$$[9a^2(2b^2 - a^2)x^2 + 9b^2(2a^2 - b^2)y^2 - 4(a^2 + b^2)(2a^2 - b^2)(2b^2 - a^2)]^2$$

CHAPITRE II.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES.

21. *Définitions et notations.* — Soit $y = f(x)$; soient Δx, Δy les accroissements de la variable et de la fonction. On a démontré (ALG., **122**) que $\Delta y = \Delta x(y' + \varepsilon)$, ε s'annulant avec Δx. Par conséquent, $\varepsilon\Delta x$ est au moins du *deuxième ordre*. Au contraire (pourvu que y' ne soit pas nulle), $y'\Delta x$ est du *premier ordre*. Cette *partie principale de la différence* de y est appelée *différentielle :* on la désigne par dy. Ainsi

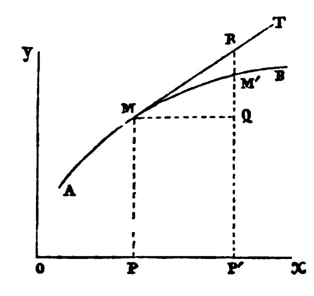
$$dy = y'\Delta x. \qquad (1)$$

22. Si $y = x$, auquel cas $y' = 1$, on a $dy = \Delta x = \Delta y$. Mais, si y était prise pour variable indépendante, on aurait $dx = \Delta y = \Delta x$. On peut donc convenir de remplacer constamment Δx par dx; ce qui donne, au lieu de l'égalité (1),

$$dy = y'dx. \qquad (2)$$

Ainsi : 1° *La différentielle de la variable indépendante est l'accroissement infiniment petit attribué à cette variable;* 2° *la différentielle de la fonction est la partie principale de l'accroissement de la fonction;* 3° *la dérivée d'une fonction est le rapport entre la différentielle de la fonction et la différentielle de la variable.*

23. *Interprétation géométrique.* — AB étant la courbe qui a pour équation $y = f(x)$, et MT étant la tangente, on a



$$PP' = \Delta x = dx, \quad QM' = \Delta y,$$
$$QR = y'dx = dy.$$

De plus,

$$QM' - QR = \Delta y - y'dx$$
$$= (y' + \varepsilon)\,dx - y'dx = \varepsilon dx.$$

Conséquemment, *la différence entre les ordonnées des points correspondants de la courbe et de la tangente est, au moins, du deuxième ordre.*

24. *Remarque.* — Au lieu de regarder $\frac{dy}{dx}$ comme un simple rapport, on admet, quelquefois, que cette notation est un symbole, destiné à représenter $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$; et alors, pour ne pas confondre ces deux acceptions de $\frac{dy}{dx}$, on figure ainsi la seconde : $\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Mais les définitions que nous avons adoptées (**21**, **22**) rendent inutile cette diversité de notations.

25. Théorème. — *En général, et quelle que soit la variable indépendante, la dérivée* y' *est égale au rapport des différentielles de* y *et de* x.

En effet, si y et x sont fonctions d'une variable indépendante u, de manière que

$$y = F(u), \quad x = \varphi(u),$$

on a toujours

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} : \frac{\Delta x}{\Delta u};$$

puis

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta u} : \lim \frac{\Delta x}{\Delta u},$$

ou

$$y' = F'(u) : \varphi'(u).$$

Mais, u étant la variable indépendante :

$$dy = F'(u)\,du, \quad dx = \varphi'(u)\,du;$$

donc enfin

$$y' = dy : dx.$$

26. *Fonctions inverses.* — Si l'équation $y = f(x)$ est résolue par rapport à x, on a $x = \psi(y)$; puis, par le théorème précédent,

$$y' = f'(x) = dy : \psi'(y)\,dy = \frac{1}{\psi'(y)}.$$

Ainsi

$$f'(x)\,\psi'(y) = 1:$$

le produit des dérivées de deux fonctions inverses est égal à 1.

27. *Dérivées et différentielles partielles.*—Soit $z=F(x,y)$; x et y étant des fonctions d'une variable indépendante t. On a trouvé (Alg., **120**)

$$\Delta z = (F'_x + \alpha)\,\Delta x + (F'_y + \beta)\,\Delta y, \tag{3}$$

α, β étant des infiniment petits, de même que Δt, Δx, Δy et Δz. En étendant la définition de la différentielle (**21**), nous aurons donc

$$dz = F'_x dx + F'_y dy,$$

ou plutôt

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy. \tag{4}$$

Dans cette équation fondamentale, les deux parties du second membre sont des *différentielles partielles;* le premier membre est la *différentielle totale* de z. En outre, la notation dz a *trois significations différentes :* on vient d'expliquer celle qui se rapporte au premier membre. Quant aux deux autres, le numérateur de $\frac{dz}{dx}$ représente la *partie principale* de l'accroissement que prendrait z, si y était constant; etc. Un peu d'attention suffit pour empêcher toute confusion entre ces diverses quantités, bien qu'elles soient représentées de la même manière.

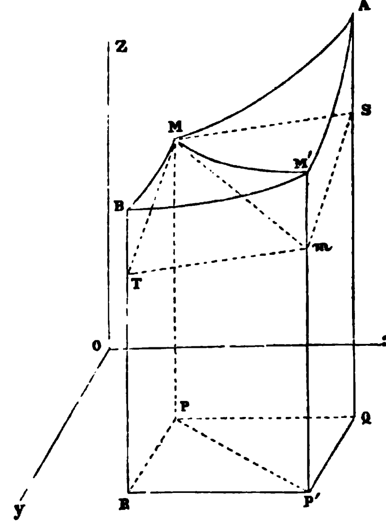
28. *Remarque.* — En reprenant la démonstration du théorème auquel nous venons de renvoyer (Alg., **120**), on reconnait que l'équation (3) subsiste quand x et y, au lieu d'être des fonctions de t, sont variables indépendantes; il en est donc de même pour l'équation (4). Dans le premier cas, celle-ci équivaut à

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}; \tag{5}$$

et cette nouvelle équation exprime, comme on devait s'y attendre, le théorème dont il s'agit.

29. *Interprétation et démonstration géométriques.* —

Supposons que la surface dont l'équation est $z = f(x, y)$ soit coupée par quatre plans, dont deux soient parallèles à zx, et les deux autres, parallèles à zy. Les tangentes MS, MT, aux sections MA, MB, déterminent le plan tangent en M(*); et celui-ci coupe, suivant un parallélogramme MSmT, le parallélipipède projeté en PQP'R. Soient



$$PQ = \Delta x = dx,$$
$$PR = \Delta y = dy:$$

je dis que mP'— MP, ***accroissement de l'ordonnée*** m**P** ***du plan tangent,*** ou ***accroissement de l'ordonnée*** MP ***de la tangente*** Mm ***à la section*** MM', est égal à $\frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy$.

En effet :

$$QS = z + \frac{dz}{dx}dx$$

(y étant supposé constant);

$$RT = z + \frac{dz}{dy}dy$$

(x étant supposé constant).

Mais, d'après une propriété connue,

$$QS + RT = MP + mP' = z + mP';$$

donc

$$2z + \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = z + mP',$$

ou

$$mP' - z = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, 2de partie, p. 11.

II.

RÈGLES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE III.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

Fonctions explicites.

30. Si l'on applique la notation différentielle aux règles du *Calcul des dérivées* (ALG., Chap. VII), on trouve, immédiatement, les théorèmes exprimés par les formules suivantes :

1° $d(u + v - w) = du + dv - dw$;
2° $d(uv) = udv + vdu$;
3° $d(u_1u_2 \ldots u_n) = u_2u_3 \ldots u_n du_1 + u_1u_3 \ldots u_n du_2 + \cdots$
$\qquad + u_1u_2 \ldots u_{n-1} du_n$;
4° $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$; 5° $d(u^n) = nu^{n-1}du$;
6° $d(\log . u) = \mathrm{M}\dfrac{du}{u}$; 7° $d(\mathrm{l}u) = \dfrac{du}{u}$;
8° $d(a^x) = a^x \mathrm{l} a dx$; 9° $d(e^x) = e^x dx$;

etc.

31. Si $y = \mathrm{F}(u, v)$, on a (**21**)

$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv.$$

22. *Remarque.* — Soient $y = F(u, x)$, $u = \varphi(x)$.
Il en résulte, par la formule précédente,

$$dy = \frac{dy}{du}\,du + \frac{dy}{dx}\,dx.$$

Ici, $\frac{dy}{dx}$ n'est pas la même chose que $y' = \lim \frac{\Delta F(\varphi(x), x)}{\Delta x}$. Cette dernière dérivée est la *dérivée totale;* l'autre est une *dérivée partielle;* ou, comme on le dit quelquefois (ALG., **158**), *la dérivée par rapport à la lettre* x. Pour éviter toute erreur, on peut écrire, au lieu de la formule précédente,

$$dy = \frac{dy}{du}\,du + \left(\frac{dy}{dx}\right)dx.$$

La même convention donnerait

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right) \text{(*)}.$$

23. EXEMPLE. $y = u \sin x$, $u = lx$.
On tire, de là :

$$\frac{dy}{du} = \sin x, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = u \cos x;$$

puis

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x} + lx . \cos x.$$

(*) Depuis un certain nombre d'années, divers Géomètres désignent, de la manière suivante, les dérivées partielles de $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Si l'on adopte cette notation, la dernière formule devient

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x}.$$

En effet, si l'on remplace d'abord u par $\mathrm{l}x$, ce qui donne $y = \mathrm{l}x \,.\, \sin x$, on trouve

$$y' = \frac{1}{x}\sin x + \mathrm{l}x \,.\, \cos x.$$

24. *Autre remarque.* — Si y, fonction de x, est donnée par une équation de la forme

$$y = \mathrm{F}(x, y),$$

on doit, pour éviter toute équivoque, écrire ainsi le résultat de la différenciation des deux membres :

$$dy = \frac{d\mathrm{F}}{dx}dx + \frac{d\mathrm{F}}{dy}dy \text{ (*)}.$$

Cette nouvelle équation, résolue par rapport à $\frac{dy}{dx} = y'$, donne

$$y' = \frac{\frac{d\mathrm{F}}{dx}}{1 - \frac{d\mathrm{F}}{dy}}.$$

Fonctions implicites.

25. *Dérivées totales.* — Si l'on a une seule équation, $\mathrm{F}(x, y) = 0$, il en résulte

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx}dx + \frac{d\mathrm{F}}{dy}dy = 0;$$

(*) La relation

$$dy = \frac{dy}{dx}dx + \frac{dy}{dy}dy$$

serait inintelligible ou absurde.

puis

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}};$$

résultat déjà démontré dans la Théorie des dérivées (ALG., 154).

86. Pour plus de généralité, considérons le cas où l'on donnerait $n-1$ équations entre n variables; et, pour fixer les idées, supposons $n=4$; de manière que ces équations soient

$$F(x,y,u,v)=0 \ (1), \quad \varphi(x,y,u,v)=0 \ (2), \quad \psi(x,y,u,v)=0 \ (3).$$

En les différenciant complètement, on a

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{du}du + \frac{dF}{dv}dv = 0,$$
$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{du}du + \frac{d\varphi}{dv}dv = 0,$$
$$\frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}dy + \frac{d\psi}{du}du + \frac{d\psi}{dv}dv = 0.$$

De ces équations, homogènes et du premier degré par rapport aux différentielles, on peut tirer

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{du}{C} = \frac{dv}{D},$$

A, B, C, D étant de certains *déterminants*. Par suite, $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$. Le second membre est une fonction de x, y, u, v. Si l'on peut résoudre les équations (1), (2), (3) par rapport à y, u, v, on exprimera $\frac{dy}{dx}$ en *fonction explicite de* x.

87. EXEMPLE :

$$a^2 + xy = uv \ (4), \quad x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \ (5), \quad x + y = u - v \ (6).$$

Différenciant, on trouve

$$xdy + ydx = udv + vdu, \quad xdx + ydy = udu + vdv,$$
$$dx + dy = du - dv;$$

puis

$$(x-y)(dy-dx) = (u-v)(dv-du),$$

ou

$$(x-y)(dy-dx) = -(x+y)(dx+dy).$$

Par suite, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. Pour vérifier cette valeur, il suffit d'observer que les équations (4), (5), (6) donnent

$$(u-v)^2 - (u^2+v^2) + 2uv = (x+y)^2 - (x^2+y^2) + 2(a^2+xy) = 0,$$

ou

$$2xy + a^2 = 0.$$

28. *Dérivées partielles.* — Supposons que l'on demande les dérivées *partielles* de deux fonctions u, v, relativement à deux variables indépendantes x, y. Le nombre des équations doit alors se réduire à *deux*. Soient

$$\varphi(x, y, u, v) = 0, \tag{7}$$

$$\psi(x, y, u, v) = 0 \tag{8}$$

ces équations. Si on les différencie en supposant y *constante*, on trouve

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{du}du + \frac{d\varphi}{dv}dv = 0, \quad \frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dx}du + \frac{d\psi}{dv}dv = 0; \tag{9}$$

et, par conséquent,

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{du}\frac{d\psi}{dv} - \frac{d\varphi}{dv}\frac{d\psi}{du}} = \frac{du}{\frac{d\varphi}{dv}\frac{d\psi}{du} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dv}} = \frac{dv}{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{du} - \frac{d\varphi}{du}\frac{d\psi}{dx}};$$

puis

$$\frac{du}{dx}=\frac{\frac{d\varphi}{dv}\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dv}}{\frac{d\varphi}{du}\frac{d\psi}{dv}-\frac{d\varphi}{dv}\frac{d\psi}{du}},\quad \frac{dv}{dx}=\frac{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{du}-\frac{d\varphi}{du}\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\varphi}{du}\frac{d\psi}{dv}-\frac{d\varphi}{dv}\frac{d\psi}{du}}.$$

Une simple permutation donnerait ensuite $\frac{du}{dy}$ et $\frac{dv}{dy}$.

29. *Remarques.* — I. Au lieu d'opérer comme nous venons de le faire, on peut différencier complètement les équations (7), (8) et conclure, des équations différentielles ainsi formées, les valeurs de du, dv, en fonctions de dx, dy (**26**) : les coefficients de ces dernières quantités seront, respectivement, les valeurs de $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$. En effet,

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy,\quad dv=\frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy.$$

II. Les valeurs de du et de dv, qui entrent dans les équations (9), diffèrent, complètement, de celles qui satisfont aux équations

$$\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{du}du+\frac{d\varphi}{dv}dv=0,\quad \frac{d\psi}{dy}dy+\frac{d\psi}{du}du+\frac{d\psi}{dv}dv=0,$$

lesquelles supposent x *constante;* ou plutôt, dans ces deux systèmes d'équations, les mêmes notations ont des significations différentes. Pour éviter toute erreur, on pourrait écrire ainsi les relations (9)

$$\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dx}+\frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dx}=0;\quad \frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{du}\frac{du}{dx}+\frac{d\psi}{dx}\frac{dv}{dx}=0 \text{ (*)}.$$

(*) Cette remarque est une confirmation de celles qui ont été faites plusieurs fois.

Exercices.

I. Différencier les fonctions

$$y = \frac{x^3 - \frac{96}{25}x + \frac{228}{125}}{(4-5x)^2} + \frac{12}{125}\,\mathrm{l}(4-5x),$$

$$y_1 = \frac{1}{5}\sin^2 x\cos^3 x - \frac{13}{15}\cos^3 x - 3\cos x - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{7}{2}\,\mathrm{l}\left(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right),$$

$$y_2 = \frac{4x\sin x - \cos x}{20\cos^5 x} + \frac{4x\sin x - 2\cos x}{15\cos^3 x} + \frac{8}{15}(x\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{l}.\cos x).$$

Résultats :

$$dy = \frac{5x^3}{(5x-4)^3}dx, \quad dy_1 = \cot^3 x\,dx, \quad dy_2 = \frac{x}{\cos^6 x}dx.$$

II. Différencier

$$y = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{2p\sin x}{m+n+(m-n)\cos x}$$
$$+ \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{2q\sin x}{m-n+(m+n)\cos x},$$

en supposant

$$m^2 = a + b + c, \quad n^2 = a - b + c,$$
$$p^2 = \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 - 2c, \quad q^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - 2c.$$

Résultat :

$$dy = \frac{dx}{a + b\cos x + c\cos 2x}.$$

III. Différencier les fonctions

$$u = \cos x\cos y\cos z - \cos x\sin y\sin z - \cos y\sin z\sin x$$
$$- \cos z\sin x\sin y,$$

$$u_1 = \text{arc tg}\,\frac{2x + y - x^2y}{1 - 2xy - x^2}, \quad u_2 = \text{arc tg}\,\frac{xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}},$$

$$u_3 = \text{arc cos}\,\frac{1 - xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}.$$

Résultats :

$$du = -\sin(x + y + z)(dx + dy + dz),$$

$$du_1 = \frac{2dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2},$$

$$du_2 = \frac{y(1 + y^2)\,dx + x(1 + x^2)\,dy}{(1 + x^2)(1 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}},$$

$$du_3 = \frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2}.$$

IV. Au moyen des équations

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z) = 0,$$
$$y^3 + z^3 + t^3 + 3(y + z + t) = 0,$$
$$z^3 + t^3 + x^3 + 3(z + t + x) = 0,$$

former

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}.$$

V. On donne

$$z = \frac{\text{arc cos}\, x + \text{arc cos}\, y}{\text{arc sin}\, x + \text{arc sin}\, y},$$

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad y = \frac{2}{e^t + e^{-t}};$$

et l'on demande la valeur de $\frac{dz}{dt}$.

VI. On donne

$$z = \text{arc sin}\, x + \text{arc sin}\, y,$$

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad y = \frac{2}{e^t + e^{-t}};$$

et l'on demande la valeur de $\frac{dz}{dt}$.

Résultat :
$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

VII. Sachant que
$$u = (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{l.\,arc\,tg}\,(x^2+y^2),$$
évaluer
$$\frac{1}{u}\left(y\frac{du}{dx} - x\frac{du}{dy}\right).$$

Résultat :
$$\frac{y-x}{y+x}.$$

VIII. Des équations
$$x+y+z+u=a,\quad x^2+y^2+z^2+u^2=b^2,\quad x^3+y^3+z^3+u^3=c^3,$$
déduire
$$\frac{dx}{du},\quad \frac{dy}{du},\quad \frac{dz}{du}.$$

IX. Trouver les valeurs de dx, dy, dz, en supposant
$$x+y+z=\mathrm{l}(u+v),\quad y+z+u=\mathrm{l}(v+x),\quad z+u+v=\mathrm{l}(x+y).$$

X. Au moyen des équations
$$r = a(1 - e\cos u),\quad u - e\sin u = nt,$$
exprimer $\frac{dr}{dt}$ en fonctions de r et des constantes a, e, n.

Résultat :
$$\frac{dr}{dt} = \frac{an}{r}\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}.$$

XI. Théorème. — *Soient* $t = f(x, y)$, $u = F(x, y)$; *d'où* $x = \varphi(t, u)$, $y = \Psi(t, u)$. *On a*
$$\left(\frac{df}{dx}\frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\Psi}{du} - \frac{d\varphi}{du}\frac{d\Psi}{dt}\right) = 1.$$

(Möbius.)

CHAPITRE IV.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES.

Fonctions d'une seule variable.

40. On a vu, dans la *Théorie des dérivées* (ALG., **156**), qu'étant donnée une fonction y, de la variable indépendante x, on peut chercher les *dérivées successives* de cette fonction, dérivées que l'on représente par $y', y'', \ldots y^{(n)}$. Pour appliquer à cette question la notation différentielle, supposons que, dans les diverses fonctions $y, y', y'', \ldots$ on attribue à x *le même accroissement* $h=dx$: c'est là ce que l'on entend quand on dit que *la différentielle de la variable indépendante est constante* (*). Cette différentielle a néanmoins pour limite zéro. Il résulte, de cette hypothèse (**22**) :

$$dy=y'dx,\quad dy'=y''dx,\quad dy''=y'''dx,\ldots\quad dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx. \quad (1)$$

Différenciant les deux membres de la première égalité, on obtient, eu égard à la deuxième, et parce que dx est constante :

$$d(dy)=(dy')\,dx=y''(dx)^2;$$

ou, pour plus de simplicité dans la notation,

$$d^2y=y''dx^2. \quad (2)$$

De même, en différenciant les deux membres de cette formule, on trouve

$$d(d^2y)=(dy'')\,dx^2=y'''dx^3.$$

(*) Ici, comme dans la plupart des cas, le mot *constante* signifie : *indépendante de x*.

Mais

$$d(d^2y) = d(ddy) = d^3y;$$

donc

$$d^3y = y'''dx^3; \tag{3}$$

et ainsi de suite. En général,

$$d^ny = y^{(n)}dx^n. \tag{n}$$

41. *Remarque.* — Les différentielles successives, dy, d^2y, d^3y, ..., sont des infiniment petits du premier ordre, du deuxième ordre, du troisième ordre, etc., à cause des facteurs dx, dx^2, dx^3, ...

Par exemple, v étant le volume d'un cube dont l'arête est x, la *différentielle première* de v est la *partie principale* de $\Delta v = (x + dx)^3 - x^3$; c'est-à-dire que

$$dv = 3x^2dx:$$

le second membre représente la somme des volumes de trois parallélipipèdes rectangles, à bases carrées, ayant chacun dx pour hauteur. En second lieu, la différentielle première d'un de ces parallélipipèdes est

$$\left[(x + dx)^2 - x^2 - dx^2\right]dx = 2xdx^2;$$

donc

$$d.dv = d^2v = 6xdx^2.$$

Enfin,

$$d^3v = 6dx^3.$$

Il est visible que d^2v représente la somme de six parallépipèdes à bases carrées : chacun d'eux est un infiniment petit du deuxième ordre; etc.

42. Les relations (2), (3), ... (n) conduisent à celles-ci :

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3},\quad \ldots,\quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Dans chacune de ces fractions, les deux termes sont des infiniment petits de même ordre; ce qu'on exprime en disant qu'ils sont *homogènes*. Cette homogénéité est *nécessaire;* car si les deux termes étaient d'ordres différents, la fraction serait *constamment nulle ou constamment infinie :* elle ne serait donc pas une fonction de x.

Fonctions de deux variables indépendantes.

43. Soit $u=f(x, y)$, x et y étant deux variables indépendantes. Nous avons trouvé (**27**) la formule

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy,$$

dans laquelle $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ représentent les *dérivées premières* de u. Chacune de ces quantités est une fonction de x et de y, dont on peut prendre la dérivée par rapport à x, ou par rapport à y.

1° D'après les conventions établies plus haut,

$$\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx}=\frac{d^2u}{dx^2},\quad \frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dy}=\frac{d^2u}{dy^2}.$$

2° La dérivée de $\frac{du}{dx}$, relative à y, c'est-à-dire $\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$, se représente ordinairement ainsi : $\frac{d^2u}{dydx}$.

3° De même,

$$\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}=\frac{d^2u}{dxdy}.$$

44. Théorème. — *Les dérivées successives* $\frac{d^2u}{dydx}$, $\frac{d^2u}{dxdy}$, *sont égales entre elles.*

Afin d'établir cette proposition importante, remarquons d'abord que

$$\frac{d^2u}{dydx} = \frac{d\frac{du}{dx}}{dy} = \lim \frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y}.$$

Mais

$$\frac{du}{dx} = \frac{df(x, y)}{dx};$$

donc

$$\Delta \frac{du}{dx} = \frac{d[f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]}{dx};$$

car *l'accroissement de la dérivée d'une fonction est égal à la dérivée de l'accroissement de cette fonction;* ou, ce qui est équivalent : *la différence des dérivées de deux fonctions est égale à la dérivée de la différence entre ces fonctions* (Alg., 125).

Maintenant,

$$\frac{1}{\Delta y} \frac{d[f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]}{dx} = \frac{d\left[\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right]}{dx};$$

car Δy est indépendante de x et de dx. Nous avons donc

$$\lim \frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \lim \frac{d\left[\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right]}{dx}$$

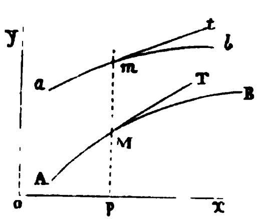
On va voir que *la limite de la dérivée d'une fonction est égale à la dérivée de la limite vers laquelle tend cette fonction.* Conséquemment,

$$\lim \frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \frac{d\left[\lim \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right]}{dx} = \frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx};$$

ou enfin

$$\frac{d^2u}{dydx}=\frac{d^2u}{dxdy}.$$

45. Pour démontrer le dernier lemme, considérons une suite de courbes telles que AMB, représentées par $y=f(x,\alpha)$, α étant un paramètre variable. Soit *amb* la position-limite de AMB, répondant à $\alpha=a$. Menons les tangentes MT, *mt* : celle-ci est la position-limite de la première. Les coefficients angulaires de ces droites sont $\frac{df(x,\alpha)}{dx}$, $\frac{df(x,a)}{dx}$; donc



$$\lim\frac{df(x,\alpha)}{dx}=\frac{d\left[\lim f(x,\alpha)\right]}{dx}.$$

46. Supposons, maintenant, qu'il s'agisse des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ d'une fonction u, prises, successivement, par rapport à diverses variables indépendantes $x, y, z, s, t, \ldots$ On a ce théorème général :

Le résultat de plusieurs dérivations successives est indépendant de l'ordre dans lequel on opère.

La démonstration se décompose en plusieurs parties (*) :

1° *On peut intervertir l'ordre des deux dernières dérivations.*

Par exemple,

$$\frac{d^5u}{dxdydzdsdt}=\frac{d^5u}{dydxdzdsdt}. \qquad (1)$$

(*) Cette marche est semblable à celle que l'on suit, en Arithmétique, pour établir la proposition relative à l'interversion des facteurs d'un produit.

Soit $\frac{d^3u}{dzdsdt}=\varphi$. Comme (**44**)

$$\frac{d^2\varphi}{dxdy}=\frac{d^2\varphi}{dydx},$$

les deux membres de l'égalité (1) sont identiques.

2° *On peut intervertir l'ordre de deux dérivations consécutives quelconques.*

Je dis que

$$\frac{d^5u}{dxdydzdsdt}=\frac{d^5u}{dxdzdydsdt}. \qquad (2)$$

En effet, d'après le premier cas :

$$\frac{d^4u}{dydzdsdt}=\frac{d^4u}{dzdydsdt};$$

donc

$$\frac{d\left(\frac{d^4u}{dydzdsdt}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{d^4u}{dzdydsdt}\right)}{dx}.$$

3° *On peut intervertir, d'une manière quelconque, l'ordre des dérivations.*

Cette proposition générale résulte, évidemment, de celle que nous venons de démontrer (**20**). Ainsi, u étant fonction de x et de y, on a

$$\frac{d^3u}{dydx^2}=\frac{d^3u}{dxdydx}=\frac{d^3u}{dx^2dy}.$$

De même, u étant fonction de x, y, z :

$$\frac{d^5u}{dz^2dy^2dx}=\frac{d^5u}{dydz^2dydx}=\frac{d^5u}{dy^2dz^2dx}=\frac{d^5u}{dydzdxdzdy};$$

etc.

Différentielles successives. — Continuation.

47. De

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy, \qquad (1)$$

on conclut, comme dans le cas d'une seule variable indépendante :

$$d(du) = d^2u = d\left(\frac{du}{dx}\right)dx + d\left(\frac{du}{dy}\right)dy.$$

Mais

$$d\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dydx}dy, \quad d\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{d^2u}{dxdy}dx + \frac{d^2u}{dy^2}dy;$$

donc

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dydx}dxdy + \frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2;$$

ou à cause du théorème ci-dessus :

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2. \qquad (2)$$

Telle est l'expression de la *différentielle deuxième* de u. Si l'on passe à la *différentielle troisième*, on trouve

$$d^3u = \left(\frac{d^3u}{dx^3}dx + \frac{d^3u}{dx^2dy}dy\right)dx^2 + 2\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}dx + \frac{d^3u}{dxdy^2}dy\right)dxdy$$
$$+ \left(\frac{d^3u}{dxdy^2}dx + \frac{d^3u}{dy^3}dy\right)dy^2,$$

ou

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3. \qquad (3)$$

La loi des résultats est visible, et l'on a, généralement,

$$\left.\begin{aligned} d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + \frac{n}{1} \frac{d^n u}{dx^{n-1} dy} dx^{n-1} dy \\ + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{d^n u}{dx^{n-2} dy^2} dx^{n-2} dy^2 + \cdots + \frac{d^n u}{dy^n} dy^n. \end{aligned}\right\} \quad (n)$$

48. Cette formule, que l'on vérifie aisément, peut être écrite sous la forme *symbolique* :

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^n,$$

pourvu que, dans le développement de la puissance, on remplace du^p par $d^p u$.

On trouve de même, u étant fonction de trois variables indépendantes :

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz\right)^n.$$

49. Supposons que, u étant fonction de x et de y, ces quantités soient fonctions d'une variable indépendante t. Nous aurons encore

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy; \quad (1)$$

mais, dx et dy n'étant plus des accroissements *arbitraires* et *constants*, les formules (2), (3), ... seront remplacées par d'autres, plus complexes que celles-ci. En effet, *la nouvelle valeur de* d²u *doit se composer de l'ancienne, augmentée d'une partie qui provient de la variation de* dx *et de* dy. On a ainsi, au lieu de la formule (2) :

$$\left.\begin{aligned} d^2 u = \left(\frac{d^2 u}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} dx dy + \frac{d^2 u}{dy^2} dy^2\right) \\ + \left(\frac{du}{dx} d^2 x + \frac{du}{dy} d^2 y\right). \end{aligned}\right\} \quad (2^{bis})$$

De même,

$$d^3u = \left(\frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3\right)$$
$$+2\left(\frac{d^2u}{dx^2}dxd^2x + \frac{d^2u}{dxdy}d^2xdy + \frac{d^2u}{dxdy}dxd^2y + \frac{d^2u}{dy^2}dyd^2y\right)$$
$$+\left(\frac{d^2u}{dx^2}dxd^2x + \frac{d^2u}{dxdy}dyd^2x + \frac{d^2u}{dxdy}dxd^2y + \frac{d^2u}{dy^2}dyd^2y\right)$$
$$+\left(\frac{du}{dx}d^3x + \frac{du}{dy}d^3y\right);$$

ou

$$\left.\begin{aligned} d^3u = &\left(\frac{d^3u}{dx^3}dx^3+3\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy+3\frac{d^3u}{dxdy^2}dxdy^2+\frac{d^3u}{dy^3}dy^3\right)\\ &+3\left[\frac{d^2u}{dx^2}dxd^2x+\frac{d^2u}{dxdy}(d^2xdy+dxd^2y)+\frac{d^2u}{dy^2}dyd^2y\right]\\ &+\left(\frac{du}{dx}d^3x+\frac{du}{dy}d^3y\right).\end{aligned}\right\}(3^{bis})$$

On voit que les résultats se compliquent rapidement.

50. *Remarque.* — Si l'on divisait par dt^2 les deux membres de l'équation (2bis), on aurait l'expression de la seconde dérivée de u, relativement à la variable indépendante t. De même pour (3bis), si l'on divisait par dt^3.

51. *Application.* — Soient

$$u = \sin x + \cos y, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

Les formules (2bis) et (3bis) deviennent d'abord, à cause des dérivées nulles :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\sin x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \cos y\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$+\cos x\frac{d^2x}{dt^2} - \sin y\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\frac{d^3u}{dt^3} = -\cos x\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + \sin y\left(\frac{dy}{dt}\right)^3$$
$$-3\sin x\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - 3\cos y\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$+\cos x\frac{d^3x}{dt^3} - \sin y\frac{d^3y}{d^3t}.$$

Mais :

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t,\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t,\quad \frac{d^3x}{dt^3} = +\sin t,$$
$$\frac{dy}{dt} = +\cos t,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\sin t,\quad \frac{d^3y}{dt^3} = -\cos t;$$

donc :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\sin x\sin^2 t - \cos y\cos^2 t - \cos x\cos t + \sin y\sin t,$$
$$\frac{d^3u}{dt^3} = \cos x\sin^3 t + \sin y\cos^3 t - 3\sin x\sin t\cos t$$
$$+ 3\cos y\cos t\sin t + \cos x\sin t + \sin y\cos t.$$

Pour vérifier ces résultats, écrivons ainsi la valeur de u :

$$u = \sin(\cos t) + \cos(\sin t);$$

nous aurons :

$$u' = \frac{du}{dt} = -\sin t\cos(\cos t) - \cos t\sin(\sin t),$$
$$u'' = \frac{d^2u}{dt^2} = -\cos t\cos(\cos t) - \sin^2 t\sin(\cos t)$$
$$+\sin t\sin(\sin t) - \cos^2 t\cos(\sin t),$$
$$u''' = \frac{d^3u}{dt^3} = \sin t\cos(\cos t) - \cos t\sin t\sin(\cos t)$$
$$-2\sin t\cos t\sin(\cos t) + \sin^3 t\cos(\cos t)$$
$$+\cos t\sin(\sin t) + \sin t\cos t\cos(\sin t)$$
$$+2\sin t\cos t\cos(\sin t) + \cos^3 t\sin(\sin t);$$

ou encore :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\cos t \cos x + \sin t \sin y - \sin^2 t \sin x - \cos^2 t \cos y,$$

$$\frac{d^3u}{dt^3} = \sin t \cos x + \cos t \sin y - 3 \cos t \sin t \sin x$$
$$+ 3 \sin t \cos t \cos y + \sin^3 t \cos x + \cos^3 t \sin y;$$

comme ci-dessus.

Dérivées successives des fonctions implicites.

52. Soit d'abord

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

x étant la variable indépendante. On tire de là

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0. \tag{2}$$

Appliquant à cette équation (2) la règle des fonctions composées (Alg., **152**), on a

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dxdy} y' + \frac{d^2F}{dxdy} y' + \frac{d^2F}{dy^2} y'^2 + \frac{dF}{dy} y'' = 0,$$

ou

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2 \frac{d^2F}{dxdy} y' + \frac{d^2F}{dy^2} y'^2 + \frac{dF}{dy} y'' = 0. \tag{3}$$

A son tour, cette équation (3) donnerait

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^3F}{dx^3} + \frac{d^3F}{dx^2dy} y' + 2\left[\frac{d^3F}{dx^2dy} y' + \frac{d^3F}{dxdy^2} y'^2 + \frac{d^2F}{dxdy} y''\right] \\ &\quad + \left(\frac{d^3F}{dxdy^2} + \frac{d^3F}{dy^3} y'\right) y'^2 + 2 \frac{d^2F}{dy^2} y'y'' \\ &\quad + \left(\frac{d^2F}{dxdy} + \frac{d^2F}{dy^2} y'\right) y'' + \frac{dF}{dy} y''' = 0; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

et ainsi de suite. Il est clair que les équations (2), (3), (4), ... déterminent, successivement, y', y'', y''', ...

53. Considérons le cas où l'on aurait deux équations entre y, la variable indépendante x et une variable u; savoir :

$$f(x, y, u) = 0, \quad \varphi(x, y, u) = 0. \tag{5}$$

Ces relations, traitées comme l'équation (1), donnent

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' + \frac{df}{du} u' = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} y' + \frac{d\varphi}{du} u' = 0;$$

puis :

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dxdy} y' + \frac{d^2f}{dxdu} u' + \left(\frac{d^2f}{dxdy} + \frac{d^2f}{dy^2} y' + \frac{d^2f}{dydu} u'\right) y'$$
$$+ \frac{df}{dy} y'' + \left(\frac{d^2f}{dxdu} + \frac{d^2f}{dydu} y' + \frac{d^2f}{du^2} u'\right) u' + \frac{df}{du} u'' = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dxdy} y' + \frac{d^2\varphi}{dxdu} u' + \left(\frac{d^2\varphi}{dxdy} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} y' + \frac{d^2\varphi}{dydu} u'\right) y'$$
$$+ \frac{d\varphi}{dy} y'' + \left(\frac{d^2\varphi}{dxdu} + \frac{d^2\varphi}{dydu} y' + \frac{d^2\varphi}{du^2} u'\right) u' + \frac{d\varphi}{du} u'' = 0;$$

etc.

Ces équations dérivées, du premier degré par rapport à y', u', y'', u'', ... feront connaître $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, absolument comme si les équations (5) avaient été résolues.

Dérivées partielles successives.

54. Si $z = f(x, y)$ est l'équation d'une surface, rapportée à des axes rectangulaires, on représente ordinairement, par p, q, r, s, t, les dérivées partielles

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dxdy}, \quad \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Au moyen de cette notation, les formules (1) et (2), du n° 47, sont remplacées par

$$dz = pdx + qdy, \quad d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2.$$

55. Lorsque z est une fonction implicite de x, y, donnée par une équation telle que

$$F(x, y, z) = 0, \tag{6}$$

on peut, de la manière suivante, trouver les valeurs de ces dérivées partielles.

En premier lieu, si l'on suppose y *constant*, on a

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} p = 0; \tag{7}$$

et, par conséquent,

$$p = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}}; \tag{8}$$

puis, par un changement de lettres :

$$q = -\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}. \tag{9}$$

Prenons maintenant la dérivée de l'équation (7), en y regardant p et z comme fonctions de la seule variable indépendante x, et $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dz}$, comme fonctions de x et de z.

Nous aurons (52)

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdz} p + \frac{d^2F}{dz^2} p^2 + \frac{dF}{dz} r = 0. \tag{10}$$

De même, si l'on suppose x *constant*, on conclut, de l'équation (7),

$$\frac{d^2F}{dxdy} + \frac{d^2F}{dydz}p + \frac{d^2F}{dxdz}q + \frac{d^2F}{dz^2}pq + \frac{dF}{dz}s = 0. \quad (11)$$

Enfin, une simple permutation donne, au lieu de l'équation (10) :

$$\frac{d^2F}{dy^2} + 2\frac{d^2F}{dydz}q + \frac{d^2F}{dz^2}q^2 + \frac{dF}{dz}t = 0. \quad (12)$$

Si l'on remplace p et q par leurs valeurs (8), (9), il ne restera plus qu'à tirer, des équations (10), (11), (12), les valeurs de r, s, t.

56. *Application.*

$$F(x, y, z) = ayz + bzx + cxy - m^3 = 0.$$

Il résulte, de cette équation :

$$\frac{dF}{dx} = bz + cy, \quad \frac{dF}{dy} = cx + az, \quad \frac{dF}{dz} = ay + bx,$$
$$\frac{d^2F}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2F}{dz^2} = 0,$$
$$\frac{d^2F}{dydz} = a, \quad \frac{d^2F}{dzdx} = b, \quad \frac{d^2F}{dxdy} = c;$$

puis :

$$p = -\frac{bz + cy}{ay + bx}, \quad q = -\frac{cx + az}{ay + bx},$$
$$2bp + (ay + bx)r = 0, \quad 2aq + (ay + bx)t = 0,$$
$$c + ap + bq + (ay + bx)s = 0;$$

et enfin :

$$r = 2b\frac{bz + cy}{(ay + bx)^2}, \quad s = 2\frac{abz}{(ay + bx)^2}, \quad t = 2a\frac{az + cx}{(ay + bx)^2}.$$

57. *Autre méthode.* — Si l'on prend les différentielles successives, *complètes*, de l'équation (6), on a, comme au n° **49** :

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2F}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2F}{dz^2}dz^2 + \frac{dF}{dz}d^2z$$
$$+2\frac{d^2F}{dydz}dydz + 2\frac{d^2F}{dzdx}dzdx + 2\frac{d^2F}{dxdy}dxdy = 0;$$

ou

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}(pdx + qdy) = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2F}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2F}{dz^2}(pdx + qdy)^2$$
$$+2\left[\frac{d^2F}{dydz}dy + \frac{d^2F}{dzdx}dx\right](pdx + qdy) + 2\frac{d^2F}{dxdy}dxdy$$
$$+\frac{dF}{dz}(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2) = 0.$$

Mais, x, y, étant des variables indépendantes, *les accroissements*, dx, dy *sont arbitraires;* donc les dernières équations se partagent en

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}p = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}q = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dz^2}p^2 + 2\frac{d^2F}{dzdx}p + \frac{dF}{dz}r = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dz^2}pq + \frac{d^2F}{dydz}p + \frac{d^2F}{dzdx}q + \frac{d^2F}{dxdy} + \frac{dF}{dz}s = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2}q^2 + 2\frac{d^2F}{dydz}q + \frac{dF}{dz}t = 0;$$

et celles-ci ne diffèrent pas des relations obtenues par le premier procédé (*).

58. Supposons que l'on donne les équations

$$z = f(x, y, u), \quad \varphi(x, y, u) = 0, \tag{13}$$

et proposons-nous d'en déduire les dérivées partielles

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dxdy}, \quad \frac{d^2z}{dy^2},$$

sans éliminer la variable auxiliaire u.

Si l'on différencie complètement ces équations, on a d'abord, pour le premier ordre :

$$dz = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{du}du, \tag{14}$$

$$0 = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{du}du. \tag{15}$$

Avant d'aller plus loin, il est bon d'observer que $\frac{df}{dx}$ et $\frac{dz}{dx} = p$ représentent des quantités différentes : c'est pour éviter toute confusion que nous écrivons $\frac{df}{dx}$ et non $\frac{dz}{dx}$.

Éliminant du, on trouve

$$dz = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy - \frac{\frac{df}{du}}{\frac{d\varphi}{du}}\left[\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy\right].$$

Cette valeur de dz doit être identique avec $pdx + qdy$; donc, dx et dy étant indépendants l'un de l'autre :

$$p = \frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{\frac{df}{du}}{\frac{d\varphi}{du}}, \quad q = \frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{\frac{df}{du}}{\frac{d\varphi}{du}} \text{ (**)}.$$

(*) Il est visible que les deux méthodes s'étendent à des dérivées d'ordre quelconque.

(**) La valeur trouvée pour p justifie la remarque ci-dessus.

59. Si l'on différencie les équations (14), (15), on a :

$$d^2z = \frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2f}{dy^2}d^2y + \frac{d^2f}{du^2}du^2$$
$$+ 2\left(\frac{d^2f}{dxdy}dxdy + \frac{d^2f}{dydu}dydu + \frac{d^2f}{dudx}dudx\right) + \frac{df}{du}d^2u,$$
$$0 = \frac{d^2\varphi}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2\varphi}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2\varphi}{du^2}du^2$$
$$+ 2\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}dxdy + \frac{d^2\varphi}{dydu}dydu + \frac{d^2\varphi}{dudx}dudx\right) + \frac{d\varphi}{du}d^2u.$$

Éliminant du et d^2u, on mettra la valeur de d^2z sous la forme

$$\mathrm{A}dx^2 + 2\mathrm{B}dxdy + \mathrm{C}dy^2;$$

de sorte que (54)

$$r = \mathrm{A}, \quad s = \mathrm{B}, \quad t = \mathrm{C}.$$

60. *Application.*

$$z = x^2 + y^2 + u^2, \quad u = x + y.$$

On tire, de ces équations :

$$dz = 2xdx + 2ydy + 2udu,$$
$$d^2z = 2dx^2 + 2dy^2 + 2du^2 + 2ud^2u,$$
$$du = dx + dy, \quad d^2u = 0;$$

puis

$$p = 2x + 2u, \quad q = 2y + 2u, \quad r = 4, \quad s = 2, \quad t = 4.$$

Exercices.

I. Trouver les différentielles successives de

$$z = \operatorname{arc\,tg} \frac{xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \ (^*).$$

(*) La valeur de la différentielle première a été indiquée ci-dessus, p. 364.

II. Calculer directement les dérivées partielles, p, q, r, s, t de la fonction précédente.

III. Étant donnée la fonction

$$\begin{aligned} u = & x\sqrt{(a^2 - y^2)(a^2 - z^2)} \\ & + y\sqrt{(a^2 - z^2)(a^2 - x^2)} \\ & + z\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)} \\ & - xyz, \end{aligned}$$

vérifier que

$$\frac{du}{dx}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{du}{dy}\sqrt{a^2 - y^2} = \frac{du}{dz}\sqrt{a^2 - z^2}$$

$$= - \frac{d^3u}{dxdydz}\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)(a^2 - z^2)}.$$

IV. Des équations

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0, \quad \sin x + \sin y + \sin z = 0,$$

déduire les valeurs de

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dz}{dx} = x', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \quad \frac{d^2z}{dx^2} = z''.$$

Résultat :

$$y' = 1, \quad y'' = 0, \quad z' = 1, \quad z'' = 0.$$

V. De l'équation

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$

tirer $y'' = \varphi(x)$, et prouver que $\varphi(a) + \varphi(b) = 0$; a, b étant les racines de

$$Cx^2 + 2Ex + F = 0.$$

VI. Quelles sont, pour $x=0$, $y=0$, les valeurs des dérivées partielles p, q, r, s, t, déduites de l'équation

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=a^3?$$

Réponse :

$$p=0,\quad q=0,\quad r=0,\quad s=-\frac{1}{a},\quad t=0.$$

VII. Au moyen de la formule de Leibniz (*), prouver que

$$\frac{d^n\left[x^n(1-x)^n\right]}{dx^n}=1.2.3\ldots n\times$$
$$\left[(1-x)^n-\left(\frac{n}{1}\right)^2(1-x)^{n-1}x+\left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2(1-x)^{n-2}x^2-\ldots\right]$$

VIII. Former

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+2xy\frac{d^2u}{dxdy}+y^2\frac{d^2u}{dy^2},$$

en supposant $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

IX. Déduire, des équations

$$z=\frac{[y-\varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)},\quad x+\alpha=\frac{y-\varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)},$$

les valeurs des dérivées p, q, r, s, t; et prouver que $pq=z$.

X. Théorème. — *Si*

$$z=\alpha x+y\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),\quad 0=x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha),$$

on a

$$rt=s^2.$$

XI. En partant de l'équation $z=\mathrm{l}.\cos x-\mathrm{l}.\cos y$, former la quantité $(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r$.

(*) Page 140.

CHAPITRE V.

CHANGEMENTS DE VARIABLES INDÉPENDANTES.

Préliminaires.

61. La formule fondamentale, $dy = y'dx$, trouvée en supposant x variable indépendante, subsiste si l'on prend pour variable indépendante une quantité quelconque u, dont x est fonction (**24**). Si, par exemple, $y = x^4$ et $x = \sqrt{u}$, d'où $y = u^2$, les deux valeurs de dy : $4x^3dx$ et $2udu$, sont égales entre elles; et la dérivée $y' = 4x^3$, est égale aussi à $\frac{2udu}{dx} = 4u\sqrt{u}$.

Cette concordance ne subsiste plus quand il s'agit des différentielles d'ordre supérieur.

Par exemple, $d^2y = 12x^2dx^2$ diffère complètement de $d^2y = 2du^2$. En effet, la seconde valeur est $2(2xdx)^2 = 8x^2dx^2$.

62. Il est aisé de se rendre compte de cette diversité de résultats. Lorsque x est variable indépendante, $dx = const$; donc $d^2x = 0$. Au contraire, u étant variable indépendante, $d^2u = 0$. Si donc, en partant de la formule $dy = 4x^3dx$, on veut parvenir à la seconde valeur de d^2y, on doit différencier dy en supposant dx variable et $d^2u = 0$. On trouve ainsi

$$d^2y = 12x^2dx^2 + 4x^3d^2x = 12u\,.\frac{du^2}{4u} - 4u\sqrt{u}\,.\frac{du^2}{4u\sqrt{u}} = 2du^2;$$

résultat exact.

63. On voit, par cette simple application, qu'il est essentiel de savoir *transformer une formule, trouvée en supposant* x *variable indépendante, de manière à la rendre applicable au cas d'une variable indépendante quelconque,* u :

c'est là ce qu'on appelle *effectuer un changement de variable indépendante.*

Cas d'une seule variable.

64. *Formules générales.* — Soient y', y'', y''', ... les dérivées successives de y, x étant variable indépendante. On a toujours

$$y' = \frac{dy}{dx}. \qquad (1)$$

Si l'on différencie les deux membres, et que l'on divise ensuite par dx, on trouve

$$y'' = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}. \qquad (2)$$

A son tour, cette relation (2) donne

$$y''' = \frac{dx^2d^3y - dxdyd^3x - 3dxd^2yd^2x + 3dy(d^2x)^2}{dx^5}; \qquad (3)$$

etc.

65. *Application.* — Soit

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}: \qquad (4)$$

cette formule, comme on le verra plus loin, représente le *rayon de courbure* d'une ligne plane, rapportée à des coordonnées rectangulaires. Remplaçant y' et y'' par leurs valeurs, on trouve

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}; \qquad (5)$$

et cette nouvelle formule subsiste, quelle que soit la variable indépendante. Si, par exemple, on veut passer aux coor-

données polaires u, ω, et prendre ω pour variable indépendante, on fera

$$x = u \cos \omega, \quad y = u \sin \omega;$$

et, par conséquent :

$$\begin{aligned}
dx &= \cos \omega du - u \sin \omega d\omega, \\
dy &= \sin \omega du + u \cos \omega d\omega, \\
d^2x &= \cos \omega d^2u - 2 \sin \omega du d\omega - u \cos \omega d\omega^2, \\
d^2y &= \sin \omega d^2u + 2 \cos \omega du d\omega - u \sin \omega d\omega^2;
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
dx^2 + dy^2 &= du^2 + u^2 d\omega^2, \\
dx d^2y - dy d^2x &= 2du^2 d\omega - u d^2u d\omega + u^2 d\omega^3.
\end{aligned}$$

Donc

$$\rho = \frac{(du^2 + u^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{2du^2 d\omega - u d^2u d\omega + u^2 d\omega^3}. \qquad (6)$$

Telle est la valeur du *rayon de courbure d'une ligne rapportée à des coordonnées polaires.*

66. *Remarque.* — On aurait pu conclure, de la relation (4), la formule *particulière* (6), sans passer par la formule *générale* (5). En effet, de

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \omega du + u \cos \omega d\omega}{\cos \omega du - u \sin \omega d\omega},$$

on tire

$$\begin{aligned}
&(\cos \omega du - u \sin \omega d\omega)^2 y'' dx \\
&= (\cos \omega du - u \sin \omega d\omega)\, d(\sin \omega du + u \cos \omega d\omega) \\
&- (\sin \omega du + u \cos \omega d\omega)\, d(\cos \omega du - u \sin \omega du);
\end{aligned}$$

etc.

67. *Autre application.* — Transformons la formule (5), de manière à prendre, pour variable indépendante, la quantité s définie par l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

La différenciation donne

$$0 = dx d^2x + dy d^2y.$$

Par conséquent, on peut éliminer une quelconque des différentielles dx, d^2x, dy, d^2y; et écrire, sous plusieurs formes, la valeur de ρ. On trouve un résultat plus élégant en prenant

$$\rho^2 = \frac{ds^6}{(dx d^2y - dy d^2x)^2},$$

et en ajoutant au dénominateur la quantité *nulle*

$$(dx d^2x + dy d^2y)^2.$$

Il résulte, en effet, de cette combinaison,

$$\rho^2 = \frac{ds^6}{(dx^2 + dy^2)(d^2x^2 + d^2y^2)},$$

ou

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2.$$

68. Revenons aux formules générales (1), (2), (3), ... et supposons que y soit variable indépendante. Alors $d^2y = 0$, $d^3y = 0$, ...; donc

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = -\frac{dy d^2x}{dx^3}, \quad y''' = \frac{dy\left[3(d^2x)^2 - dx d^3x\right]}{dx^5},$$

etc.; ou bien, en appelant x', x'', x''', ... les dérivées successives de x, par rapport à y :

$$y' = \frac{1}{x'}, \quad y'' = -\frac{x''}{x'^3}, \quad y''' = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \ \ldots$$

69. *Remarque.* — Supposons que x, y représentent des lignes. Alors $y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $x' = \lim \frac{\Delta x}{\Delta y}$ sont des ***rapports***, c'est-à-dire des *grandeurs de l'ordre* 0. Par suite, y'' et x''

sont de l'ordre -1; y''' et x''' de l'ordre -2, etc. Il en résulte que les dernières équations sont *homogènes;* ce qui doit être.

70. Si, dans la formule

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \tag{4}$$

on remplace y' par $\frac{1}{x'}$, y'' par $-\frac{x''}{x'^3}$, on trouve

$$\rho = \frac{(1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}{-x''};$$

résultat de même forme que le précédent (*). En effet, dans le cas des coordonnées rectilignes, il est indifférent de prendre x ou y pour variable indépendante.

Changements de variables dans les dérivées partielles.

71. Supposons qu'étant donnée une équation

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

on veuille la transformer, en prenant, comme variables indépendantes, les quantités u, v définies par

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

On peut employer deux méthodes pour déterminer les valeurs de p, q, r, s, t, en fonction de u et de v (**).

72. *Première méthode.* — La dérivée partielle p est

(*) A cause de la puissance $\frac{3}{2}$, on peut convenir de prendre ρ positivement.

(**) Les calculs suivants ont une complète analogie avec ceux que nous avons développés ci-dessus (**55**, **57**).

égale à $dz : dx$, *y étant supposée constante.* On a donc, simultanément,

$$p = \frac{\frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dv}dv}{\frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv}, \quad 0 = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv.$$

Éliminant le rapport $\frac{dv}{du}$, on trouve

$$p = \frac{\frac{dz}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dz}{dv}\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}. \qquad (7)$$

De même,

$$q = \frac{\frac{dz}{dv}\frac{dx}{du} - \frac{dz}{du}\frac{dx}{dv}}{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}. \qquad (8)$$

En second lieu, $r = dp : dx$, y étant constante. Il faudrait donc différencier complètement la formule (7), diviser le résultat par $\frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv$, et éliminer encore $\frac{dv}{du}$. On calculerait, d'une manière analogue, s et t.

72. *Seconde méthode.* — On a

$$dz = pdx + qdy = \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dv}dv,$$

$$dx = \frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv, \quad dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv;$$

donc

$$p\left(\frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv\right) + q\left(\frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv\right) = \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dv}dv.$$

Cette équation, dans laquelle du et dv sont *arbitraires*, se décompose en

$$p\frac{dx}{du}+q\frac{dy}{du}=\frac{dz}{du},\quad p\frac{dx}{dv}+q\frac{dy}{dv}=\frac{dz}{dv};$$

équations d'où l'on tire les valeurs (7), (8).

Semblablement, x et y étant considérées comme fonctions de u, v :

$$\begin{aligned}
d^2z &= dpdx + dqdy + pd^2x + qd^2y \\
&= rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 + pd^2x + qd^2y \\
&= \frac{d^2z}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2z}{dudv}dudv + \frac{d^2z}{dv^2}dv^2, \\
d^2x &= \frac{d^2x}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2x}{dudv}dudv + \frac{d^2x}{dv^2}dv^2, \\
d^2y &= \frac{d^2y}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2y}{dudv}dudv + \frac{d^2y}{dv^2}dv^2.
\end{aligned}$$

Substituant, puis égalant les coefficients de du^2, de $dudv$ et de dv^2, on aura trois équations du premier degré, entre les inconnues r, s, t.

74. *Application.* — Soit donnée l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}=0,$$

ou

$$r+t=0;$$

les nouvelles variables indépendantes étant les coordonnées polaires u, ω.

A cause de

$$x=u\cos\omega,\quad y=u\sin\omega,$$

on a d'abord, d'après les formules ci-dessus :

$$p\cos\omega+q\sin\omega=\frac{dz}{du},\quad -pu\sin\omega+qu\cos\omega=\frac{dz}{d\omega};$$

d'où

$$p=\frac{dz}{du}\cos\omega-\frac{1}{u}\frac{dz}{d\omega}\sin\omega,\qquad q=\frac{dz}{du}\sin\omega+\frac{1}{u}\frac{dz}{d\omega}\cos\omega.$$

Différenciant, on trouve

$$\begin{aligned}rdx+sdy=&\left(\frac{d^2z}{du^2}du+\frac{d^2z}{dud\omega}d\omega-\frac{1}{u}\frac{dz}{d\omega}d\omega\right)\cos\omega\\&-\left(\frac{dz}{du}d\omega-\frac{1}{u^2}\frac{dz}{d\omega}du+\frac{1}{u}\frac{d^2z}{d\omega^2}d\omega+\frac{1}{u}\frac{d^2z}{dud\omega}du\right)\sin\omega,\\sdx+tdy=&\left(\frac{d^2z}{du^2}du+\frac{d^2z}{dud\omega}d\omega-\frac{1}{u}\frac{dz}{d\omega}d\omega\right)\sin\omega\\&+\left(\frac{dz}{du}d\omega-\frac{1}{u^2}\frac{dz}{d\omega}du+\frac{1}{u}\frac{d^2z}{d\omega^2}d\omega+\frac{1}{u}\frac{d^2z}{dud\omega}du\right)\cos\omega.\end{aligned}$$

Remplaçant dx, dy par leurs valeurs, et égalant les coefficients de du et de $d\omega$, on tire, de ces équations :

$$\begin{aligned}r\cos\omega+s\sin\omega&=\frac{d^2z}{du^2}\cos\omega+\frac{1}{u^2}\frac{dz}{d\omega}\sin\omega-\frac{1}{u}\frac{d^2z}{dud\omega}\sin\omega,\\-ur\sin\omega+us\cos\omega&=\frac{d^2z}{dud\omega}\cos\omega-\frac{dz}{du}\sin\omega-\frac{1}{u}\frac{d^2z}{d\omega^2}\sin\omega-\frac{1}{u}\frac{dz}{d\omega}\cos\omega,\\s\cos\omega+t\sin\omega&=\frac{d^2z}{du^2}\sin\omega-\frac{1}{u^2}\frac{dz}{d\omega}\cos\omega+\frac{1}{u}\frac{d^2z}{dud\omega}\cos\omega,\\-us\sin\omega+ut\cos\omega&=\frac{d^2z}{dud\omega}\sin\omega+\frac{dz}{du}\cos\omega+\frac{1}{u}\frac{d^2z}{d\omega^2}\cos\omega-\frac{1}{u}\frac{dz}{d\omega}\sin\omega.\end{aligned}$$

Multipliant la première relation par $u\cos\omega$, la deuxième par $\sin\omega$, et retranchant, on a

$$\begin{aligned}ur=&u\frac{d^2z}{du^2}\cos^2\omega-2\frac{d^2z}{dud\omega}\sin\omega\cos\omega\\&+\frac{1}{u}\frac{d^2z}{d\omega^2}\sin^2\omega+\frac{2}{u}\frac{dz}{d\omega}\sin\omega\cos\omega+\frac{dz}{du}\sin^2\omega.\end{aligned}$$

De même,

$$ut = u\frac{d^2z}{du^2}\sin^2\omega + 2\frac{d^2z}{du\,d\omega}\sin\omega\cos\omega + \frac{1}{u}\frac{d^2z}{d\omega^2}\cos^2\omega$$
$$-\frac{2}{u}\frac{dz}{d\omega}\sin\omega\cos\omega + \frac{dz}{du}\cos^2\omega.$$

La *transformée* de

$$r + t = 0$$

est donc

$$u\frac{d^2z}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{d^2z}{d\omega^2} + \frac{dz}{du} = 0.$$

75. *Remarques.* — I. Les quatre équations, entre r, s, t, n'équivalent qu'à trois équations distinctes.

II. On simplifie le calcul précédent si l'on part des relations

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \omega = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}, \quad dz = \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{d\omega}d\omega,$$
$$d^2z = \frac{d^2z}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2z}{du\,d\omega}du\,d\omega + \frac{d^2z}{d\omega^2}d\omega^2.$$

Exercices.

I. Étant données les équations

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega,$$

dans lesquelles a, e, c sont des constantes, et r, ω, x, y des fonctions de la variable indépendante t; exprimer, en fonction de r et des constantes, les quantités

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2.$$

Résultats :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{c\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}{are\sqrt{1-e^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{c(a-r)}{are},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c^2}{ar^3e(1-e^2)}\left[a(1-e^2)-r\right],$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{c^2}{ar^3e}\frac{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{a(1-e^2)}\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 = \frac{c^4}{a^2r^4(1-e^2)^2}.$$

II. Transformer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0,$$

en prenant, comme variable indépendante, $t = \arccos x$.

Résultat :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$$

III. Même question pour

$$(a+x)^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3(a+x)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (a+x)\frac{dy}{dx} + by = 0,$$

sachant que $t = \mathrm{l}(a+x)$.

Résultat :

$$\frac{d^3y}{dt^3} + by = 0.$$

IV. On donne les équations

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0, \quad x^2+y^2+z^2 = r^2, \quad u = \varphi(r);$$

et l'on propose de transformer la première, en prenant r pour variable indépendante.

Résultat :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0.$$

V. Transformer

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

en prenant, pour variables indépendantes, les quantités r, θ, φ, déterminées par les relations

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta\cos\varphi.$$

Résultat :

$$r\frac{d^2(ru)}{dr^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\left(\sin\theta\frac{du}{d\theta}\right)}{d\theta} = 0.$$

VI. Transformer l'équation

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + y^2\frac{d^2u}{dy^2} + z^2\frac{d^2u}{dz^2}$$
$$+ yz\frac{d^2u}{dydz} + zx\frac{d^2u}{dzdx} + xy\frac{d^2u}{dxdy} = 0,$$

en prenant :

$$x = \beta\gamma, \quad y = \gamma\alpha, \quad z = \alpha\beta.$$

Résultat :

$$\alpha^2\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \beta^2\frac{d^2u}{d\beta^2} + \gamma^2\frac{d^2u}{d\alpha^2} = 0.$$

III.

APPLICATIONS ANALYTIQUES.

CHAPITRE VI.

SÉRIES DE TAYLOR ET DE MAC-LAURIN (*).

Théorème de Taylor.

76. *Première démonstration.* — Supposons, pour fixer les idées, que $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$ et $f'''(z)$ restent finies et continues lorsque la variable z est comprise entre x et $x+h$.

Supposons, en outre, que A et B soient la plus petite et la plus grande des valeurs que prenne alors $f'''(z)$. On aura, en général,

$$f'''(z) - A > 0. \tag{1}$$

Le premier membre est la dérivée, relative à z, de la fonction

$$f''(z) - f''(x) - A(z - x),$$

qui s'annule pour $z = x$. D'ailleurs cette fonction est croissante, puisque sa dérivée est positive; donc, pour $z > x$,

$$f''(z) - f''(x) - A(z - x) > 0. \tag{2}$$

De l'inégalité (2) on tire, par le même raisonnement,

$$f'(z) - f'(x) - f''(x)(z - x) - A\frac{(z - x)^2}{1.2} > 0;$$

(*) Taylor (Brook), né à Edmonton, en 1685; mort en 1731. — Mac-Laurin (Colin), né à Kilmoddan, en 1698; mort en 1746.

puis, de celle-ci :

$$f(z)-f(x)-f'(x)(z-x)-f''(x)\frac{(z-x)^2}{1.2}-A\frac{(z-x)^3}{1.2.3}>0.$$

Donc, pour $z=x+h$:

$$f(x+h)>f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+A\frac{h^3}{1.2.3}.$$

La même méthode, appliquée à la limite B, donne

$$f(x+h)<f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+B\frac{h^3}{1.2.3}.$$

Remarquons maintenant que A et B, étant le minimum et le maximum de $f'''(z)$ (dans l'intervalle considéré), toute quantité C, intermédiaire entre A et B, peut être représentée par $f'''(x+\theta h)$, θ étant un nombre *inconnu*, compris entre 0 et 1 (Alg., 122). Donc

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x+\theta h);$$

et, en général,

$$\left.\begin{aligned}f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\cdots\\+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x)+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{n+1}(x+\theta h).\end{aligned}\right\}(A)$$

77. *Seconde démonstration.* — D'après ce que l'on a vu dans le cas où $f(x)$ est un polynôme entier (Alg., 159), on est conduit à poser

$$f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-\cdots-\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x)=R,$$

R étant le *reste*.

Remplaçant x par $a - h$, on a d'abord

$$R = f(a) - f(a-h) - \frac{h}{1} f'(a-h) - \frac{h^2}{1.2} f''(a-h) - \dots - \frac{h^n}{1.2\dots n} f^n(a-h) = \varphi(h); \quad (3)$$

puis, en prenant la dérivée relativement à h :

$$R' = \varphi'(h) = f'(a-h) + \frac{h}{1} f''(a-h) + \dots + \frac{h^n}{1.2\dots n} f^{n+1}(a-h)$$
$$- f'(a-h) - \frac{h}{1} f''(a-h) - \dots - \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^n(a-h);$$

c'est-à-dire

$$\varphi'(h) = \frac{h^n}{1.2\dots n} f^{n+1}(a-h). \quad (4)$$

D'un autre côté, l'égalité (3) donne

$$\varphi(0) = 0. \quad (5)$$

Conséquemment, il s'agit de déterminer la fonction $\varphi(h)$, s'il est possible, par la connaissance de sa dérivée et par la condition (5) (*). A cet effet, nous démontrerons d'abord la proposition suivante :

78. Lemme (**). — *Si les fonctions* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$, $\psi'(x)$ *restent finies et continues depuis* $x = a$ *jusqu'à* $x = b$, *et que la fonction* $\psi'(x)$ *ne s'annule pas dans l'intervalle, on a*

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'[a + \varepsilon(b-a)]}{\psi'[a + \varepsilon(b-a)]}, \quad (6)$$

ε *étant un nombre inconnu, compris entre* 0 *et* 1.

(*) Cette méthode, analogue à celle qui nous a servi pour les développements de $l(1 \pm x)$ et de arc tg x, a été indiquée par M. Schlömilch (*Journal de Liouville*, t. XXIII).

(**) Dû à M. Schlömilch.

Soit la fonction

$$F(x) = [\varphi(b) - \varphi(a)]\,\psi(x) - [\psi(b) - \psi(a)]\,\varphi(x):$$

d'après les hypothèses précédentes, elle est continue, aussi bien que sa dérivée, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. Or,

$$\begin{aligned} F(a) &= \quad \varphi(b)\,\psi(a) - \psi(b)\,\varphi(a), \\ F(b) &= -\varphi(a)\,\psi(b) + \psi(a)\,\varphi(b) = F(a). \end{aligned}$$

La fonction reprenant la même valeur pour $x = a$ et pour $x = b$, $F'(x)$ s'annule, *au moins une fois*, entre $x = a$ et $x = b$ (*); ou, ce qui est équivalent, l'*équation* $F'(x) = 0$ *a au moins une racine comprise entre* a *et* b. Et comme

$$F'(x) = [\varphi(b) - \varphi(a)]\,\psi'(x) - [\psi(b) - \psi(a)]\,\varphi'(x),$$

$F'(x) = 0$ équivaut à

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}:$$

le lemme est donc démontré (**).

79. Dans la formule (6), supposons

$$a = 0, \quad b = h, \quad \psi(x) = x^{p+1}, \quad \varepsilon = 1 - \theta:$$

il vient

$$\varphi(h) = (0) + \frac{h}{(p+1)(1-\theta)^p}\,\varphi'[(1-\theta)h];$$

et, à cause des relations (3) et (4) :

$$\varphi(h) = R = \frac{h}{(p+1)(1-\theta)^p}\,\frac{(1-\theta)^n h^n}{1.2.3\ldots n}\,f^{n+1}[a - (1-\theta)h];$$

(*) Voir, par exemple, la démonstration du Théorème de Rolle (ALG., 278).

(**) D'après l'équation fondamentale

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x + \theta h),$$

on a

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'[a + \varepsilon(b-a)]}{\psi'[a + \varepsilon_1(b-a)]};$$

mais rien ne prouve, *a priori*, que $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

d'où, en remettant x au lieu de $a - h$:

$$R = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1.2.3\ldots n(p+1)} f^{n+1}(x+\theta h). \qquad (7)$$

On a donc, finalement :

$$\left.\begin{array}{l} f(x+h) = f(x) + \dfrac{h}{1} f'(x) + \dfrac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots \\ \quad + \dfrac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + \dfrac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots n(p+1)} f^{n+1}(x+\theta h). \end{array}\right\} \text{(B)}$$

80. *Remarques.* — I. Chacune des formules (A), (B) constitue le *Théorème de Taylor*. Elles supposent que la valeur attribuée à x ne rend infinie aucune des quantités $f(x)$, $f'(x)$, ... $f^n(x)$.

II. Si, n augmentant indéfiniment, le reste R tend vers zéro, la *Série de Taylor* est convergente, et a pour *limite* $f(x+h)$.

III. On peut donc, sous certaines conditions, développer $f(x+h)$ en série convergente, ordonnée suivant les puissances croissantes de h.

IV. Dans les formules (A), (B), θ *est une fraction proprement dite, inconnue* (*). De plus, p *désigne un nombre entier, arbitraire, mais compris entre* 0 *et* n.

81. *Diverses formes du reste.* — Si, dans l'expression générale (7), on fait $p = n$, $p = 0$, on trouve ces deux autres formes du reste, fréquemment employées (**) :

$$R = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(x+\theta h), \qquad (8)$$

$$R = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2\ldots n} f^{n+1}(x+\theta h). \qquad (9)$$

(*) Il est presque superflu de faire observer que, dans ces deux formules, la fraction θ n'a pas la même valeur.

(**) La première a été indiquée ci-dessus (**70**).

82. Il résulte, de cette seconde valeur de R :

$$\left.\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{h}{1} f(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots \\ &+ \frac{h^n}{1.2\ldots.n} f^n(x) + \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2\ldots n} f^{n+1}(x+\theta h). \end{aligned}\right\} \text{(C)}$$

Série de Mac-Laurin.

83. Si, dans les formules (A), (B), (C), on suppose $x=0$, et que l'on remplace ensuite la lettre h par la lettre x, on trouve :

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \cdots \\ &+ \frac{x^n}{1.2\ldots..n} f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)} f^{n+1}(\theta x), \end{aligned}\right\} \text{(A')}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \cdots \\ &+ \frac{x^n}{1.2\ldots..n} f^n(0) + \frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots n(p+1)} f^{n+1}(\theta x), \end{aligned}\right\} \text{(B')}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \cdots \\ &+ \frac{x^n}{1.2\ldots..n} f^n(0) + \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2\ldots n} f^{n+1}(\theta x). \end{aligned}\right\} \text{(C')}$$

Chacune de ces nouvelles formules donne le développement de $f(x)$, ordonné suivant les puissances croissantes de x. La série, qui ne diffère pas, au fond, de celle de Taylor, est appelée *Série de Mac-Laurin.*

84. *Remarques.* — I. Si quelqu'une des quantités $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... devient infinie pour $x=0$, $f(x)$ n'est pas développable suivant les puissances de x. Par exemple, on ne saurait développer, de cette manière, $\mathrm{l}\,x$, parce que

$$\mathrm{l}(0) = -\infty.$$

Mais si, dans la formule (A′), on fait

$$x = a, \quad h = x - a,$$

la quantité a étant choisie convenablement, on trouve

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \cdots \\ &+ \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} f^n(a) + \mathrm{R}, \\ \mathrm{R} &= \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}\left[a + \theta(x-a)\right]. \end{aligned}\right\} \text{(D)}$$

Ainsi, l'on pourra développer $f(x)$ suivant les puissances de $x - a$.

II. Cette formule (D) est précisément, sauf la notation, la formule (A). Comme nous venons de le dire, les Théorèmes de Taylor et de Mac-Laurin n'en font donc véritablement qu'un.

Autres remarques sur la série de Mac-Laurin.

85. I. Tout développement de $f(x)$, suivant les puissances entières et positives de x, est identique avec celui qui résulte du Théorème de Mac-Laurin. En effet, si l'on a

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x^3 + \cdots = \mathrm{A}' + \mathrm{B}'x + \mathrm{C}'x^2 + \mathrm{D}'x^3 + \cdots,$$

on trouve successivement, en supposant $x = 0$:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}', \quad \mathrm{B} = \mathrm{B}', \quad \mathrm{C} = \mathrm{C}', \ldots$$

Ainsi *deux développements d'une même fonction, ordonnés suivant les puissances entières et positives de la variable, sont identiques* (*).

(*) Cette propriété est l'extension de celle qui est démontrée dans l'*Algèbre*, p. 322.

II. Il ne suffit pas, pour qu'une fonction soit développable par la série de Mac-Laurin, que cette série soit convergente : il faut encore que *le reste* tende vers zéro. Par exemple, si l'on appliquait la formule (A′) au développement de

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

on trouverait

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \ldots :$$

dans ce cas, on a toujours

$$\mathrm{R} = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

III. De là résulte que si on voulait développer, par la même formule,

$$f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}},$$

la série aurait pour limite, non $f(x)$, mais $\varphi(x)$.

CHAPITRE VII.

APPLICATIONS DE LA FORMULE DE MAC-LAURIN.

Développements de sin x et cos x.

86. Soit

$$f(x) = \sin x.$$

Alors

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

. . . .

$$f^n(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad f^{n+1}(x) = \sin\left[x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right];$$

puis

$$f(0)=0,\quad f'(0)=\sin\frac{\pi}{2}=+1,\quad f''(0)=0,$$

$$f'''(0)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1,\ldots,\quad f^{n+1}(\theta x)=\sin\left[\theta x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right].$$

On a donc

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{}{1.2.3.4.5}-\cdots\pm\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\mathrm{R},$$

n étant *impair;* et, en prenant la *première forme* du reste (76) :

$$\mathrm{R}=\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\sin\left[\theta x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right]=\pm\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\sin\theta x.$$

87. La série

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots$$

est convergente quel que soit x (Alg., 18). De plus, si l'on écrit ainsi le premier facteur de R :

$$\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdots\cdots\frac{x}{n}\cdot\frac{x}{n+1},$$

on voit que, à partir de $n+1>x$, les facteurs du nouveau produit sont tous inférieurs à 1; donc ce produit diminue plus rapidement que les termes d'une progression par quotient, décroissante; donc il a pour limite zéro. Et comme $\sin\theta x$ est compris entre $+1$ et -1, on a *lim* $\mathrm{R}=0$.

En résumé :

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots \qquad (1)$$

88. On trouve, absolument de la même manière,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots \qquad (2)$$

Développement de e^x.

89. Si l'on suppose

$$f(x) = e^x,$$

il vient, à cause de

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \ldots . f^n(x) = e^x :$$

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1, \ldots . f^n(0) = 1,\ f^{n+1}(\theta x) = e^{\theta x};$$

donc

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^n}{1.2 \ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1.2 \ldots (n+1)} e^{\theta x}.$$

Le *reste*

$$R = \frac{x^{n+1}}{1.2 \ldots (n+1)} e^{\theta x}.$$

Quelle que soit la valeur attribuée à x, *le facteur* $e^{\theta x}$ *est fini et constant.* Quant au facteur

$$\frac{x^{n+1}}{1.2 \ldots (n+1)} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdots \frac{x}{n+1},$$

il tend vers zéro dès que $n+1$ surpasse x (**87**). Donc

$$\lim R = 0.$$

Ainsi, pour toute valeur réelle de x,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots \qquad (3)$$

Formule du binôme.

80. Au lieu de conclure, du théorème de Mac-Laurin, le développement de $(1+x)^m$, nous allons chercher la limite de la *série du binôme* (ALG., **18**). Soit donc

$$y = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots; \quad (1)$$

la variable étant comprise entre -1 et $+1$, *exclusivement* (*).

Prenant les dérivées des deux membres, on a

$$y' = m\left[1 + \frac{m-1}{1}x + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^2 + \cdots\right] (^{**}). \quad (2)$$

Si l'on observe que la nouvelle série se déduit, de la première, par le changement de m en $m-1$, on est conduit à multiplier y' par $1+x$. On obtient ainsi

$$y'(1+x)$$

$$= m\left\{\begin{array}{l|l|l|l} 1 + \frac{m-1}{1} & x + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} & x^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3} & x^3 + \cdots \\ +1 & + \frac{m-1}{1} & + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} & + \cdots \end{array}\right\};$$

ou, par des identités connues,

$$y'(1+x) = my,$$

ou encore

$$\frac{y'}{y} = m\frac{1}{1+x}. \quad (3)$$

(*) Dans certains cas, la *formule du binôme* subsiste pour $x = \pm 1$. (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. I, p. 121.)

(**) Cette conclusion serait inadmissible si la série *dérivée* était divergente; ce qui n'a pas lieu dans le cas actuel.

Le premier membre est la dérivée de $\mathrm{l}\,y$; le second est la dérivée de $m\,\mathrm{l}(1+x)+c$. D'ailleurs $x=0$ doit donner $y=1$; donc $c=0$; et, finalement,

$$y=(1+x)^m. \tag{4}$$

Développement de $\mathrm{l}(1+x)$.

91. De

$$f(x)=\mathrm{l}(1+x),$$

on conclut :

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1},\quad f''(x)=-(1+x)^{-2},\ \ldots.$$

$$f^n(x)=(-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)(1+x)^{-n},$$

$$f^{n+1}(\theta x)=(-1)^n 1.2\ldots n(1+\theta x)^{-n-1};$$

puis

$$\mathrm{l}(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots-\pm\frac{x^n}{n}\pm\mathrm{R};$$

R représentant

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\quad\text{ou}\quad\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

suivant que l'on adopte la formule (A') ou la formule (B') (**82**).

92. 1° Si x est compris entre 0 et 1, $\lim \mathrm{R}=0$.

2° Quand x est compris entre 0 et -1, *exclusivement*, la seconde valeur de R devient, en y remplaçant x par $-z$:

$$\mathrm{R}=\pm\frac{(1-\theta)^n z^{n+1}}{(1-\theta z)^{n+1}}=\pm\frac{z}{1-\theta z}\cdot\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^n.$$

Donc, à cause de $z-\theta z<1-\theta z$,

$$\lim \mathrm{R}=0.$$

Ainsi, la variable satisfaisant aux conditions

$$-1<x\overline{\overline{<}}1,$$

on a, en série convergente,

$$l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\pm\frac{x^n}{n}\mp\cdots\ (^*). \qquad (6)$$

Exercices.

I. Vérifier que l'on a, quel que soit x,

$$\sin^3 x = x^3 - \frac{3^2+1}{4.5}x^5 + \frac{3^4+1}{4.5.6.7}x^7 - \frac{3^6+1}{4\ldots 9}x^9 + \cdots$$

II. Appliquer la formule de Mac-Laurin au développement de la fonction

$$y = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha).$$

Résultat :

$$y = 1 + \frac{x}{1}\cos\alpha + \frac{x^2}{1.2}\cos 2\alpha + \frac{x^3}{1.2.3}\cos 3\alpha + \cdots$$

III. Démontrer que le développement de $\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}$ ne contient aucune puissance impaire de x.

IV. Soit

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2} = 1 + \frac{B_1}{1.2}x^2 + \frac{B_3}{1.2.3.4}x^4 + \cdots + \frac{B_{2n-1}}{1.2\ldots 2n}x^{2n} + \cdots$$

Trouver B_1, B_3, B_5; et démontrer la relation

$$B_{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{2.3}B_{2n-3} + \cdots + \frac{2n}{2}B_1 = \frac{2n-1}{2(2n+1)},$$

due à Moivre (**).

(*) Cette formule a été démontrée dans l'*Algèbre* (p. 131).

(**) Les numérateurs B_1, B_3, B_5, ... sont appelés *Nombres de Bernoulli* : ils se présentent dans diverses théories (*Mélanges mathématiques*, pp. 110 et suivantes).

V. Conclure, du développement précédent, les formules :

$$x \cot x = 1 - \frac{B_1}{1.2}(2x)^2 + \frac{B_3}{1.2.3.4}(2x)^4 - \cdots \pm \frac{B_{2n-1}}{1.2...2n}(2x)^{2n} \mp \cdots,$$

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + 2(2-1)\frac{B_1}{1.2}x^2 - 2(2^3-1)\frac{B_3}{1.2.3.4}x^4 + \cdots,$$

$$\operatorname{tg} x = 4(4-1)\frac{B_1}{1.2}x - 4^2(4^2-1)\frac{B^3}{1.2.3.4}x^3 + \cdots$$

VI. Au moyen du Théorème de Taylor, démontrer la formule

$$\operatorname{arc\,tg}(x+h) = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{h}{1}\sin\varphi \sin\varphi - \frac{h^2}{2}\sin^2\varphi \sin 2\varphi$$
$$+ \frac{h^3}{3}\sin^3\varphi \sin 3\varphi - \cdots,$$

dans laquelle

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} \ (*).$$

VII. Déduire, de la formule précédente :

$$\frac{\pi}{2} = x + \sin x \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x \cos^2 x + \frac{1}{3}\sin 3x \cos^3 x + \cdots,$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{x}{2} + \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots \ (**).$$

VIII. Démontrer que, pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^4 + \cdots$$
$$= \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots$$

(*) La démonstration résulte, immédiatement, de la valeur de $(\operatorname{arc\,tg} x)^{(n)}$, indiquée p. 140.

(**) Ces relations supposent $0 < x < \pi$. Si, par exemple, on y faisait $x = 0$, on trouverait ce résultat absurde : $\pi = 0$.

IX. Vérifier la relation

$$\frac{l(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \cdots$$

X. *Si la fonction* $y = l.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ *est développable sous la forme*

$$a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots,$$

on a

$$x = a_1y - a_3y^3 + a_5y^5 - \cdots \text{ (*)}.$$

CHAPITRE VIII.

EXTENSION DU THÉORÈME DE TAYLOR.

93. Afin de développer $f(x+h, y+k)$ suivant les puissances et les produits des accroissements h, k, nous allons appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction

$$f(x+ht, y+kt):$$

si nous trouvons

$$f(x+ht, y+kt) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + \cdots,$$

il nous suffira de faire $t=1$ dans cette égalité.

A cet effet, posons

$$x + th = u, \quad y + tk = v,$$
$$f(u, v) = \varphi(t).$$

(*) La démonstration de cette remarquable propriété repose sur la Théorie des exponentielles imaginaires. (LEGENDRE, *Exercices*, t. II, p. 144; GENOCCHI, *Nouvelles Annales*, t. IX, p. 182.)

Il résulte, de ces abréviations (83),

$$\left.\begin{aligned} f(u,v) = \varphi(0) + \frac{t}{1}\varphi'(0) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''(0) + \cdots + \frac{t^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(0) \\ + \frac{t^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\varphi^{n+1}(\theta t); \end{aligned}\right\} (1)$$

et il reste à former les quantités :

$$\varphi'(t),\quad \varphi''(t),\ \ldots,\ \varphi^{n+1}(t);$$

puis celles-ci :

$$\varphi'(0),\quad \varphi''(0),\ \ldots,\ \varphi^n(0),\quad \varphi^{n+1}(\theta t).$$

84. 1° $\varphi'(t) = \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{df}{dv}\dfrac{dv}{dt} = h\dfrac{df}{du} + k\dfrac{df}{dv}$,

$$\varphi''(t) = h\left(\frac{d^2f}{du^2}h + \frac{d^2f}{dudv}k\right) + k\left(\frac{d^2f}{dudv}h + \frac{d^2f}{dv^2}k\right)$$

$$= h^2\frac{d^2f}{du^2} + 2hk\frac{d^2f}{dudv} + k^2\frac{d^2f}{dv^2}.$$

. . . .

$$\varphi^n(t) = h^n\frac{d^nf}{du^n} + \frac{n}{1}h^{n-1}k\frac{d^nf}{du^{n-1}dv} + \cdots + k^n\frac{d^nf}{dv^n},$$

$$\varphi^{n+1}(t) = h^{n+1}\frac{d^{n+1}f}{du^{n+1}} + \frac{n+1}{1}h^nk\frac{d^{n+1}}{du^ndv} + \cdots + k^{n+1}\frac{d^{n+1}f}{dv^{n+1}}\ (*).$$

2° Les fonctions $f(x, y)$, $f(u, v)$ ne différant que par un changement de lettres, il en est de même pour les dérivées de la première, comparées à celles de la seconde.

Mais il y a plus : lorsque $t = 0$, les variables auxiliaires u, v se réduisent, l'une à x, l'autre à y. Donc, *pour* $t = 0$,

$$\frac{df(u, v)}{du} = \frac{df(x, y)}{dx};$$

(*) Il est bien entendu que, dans toutes ces formules, la lettre f désigne $f(u, v)$.

et, en conséquence :

$$\varphi\ (0)=f(x,y),$$

$$\varphi'\ (0)=h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy},$$

$$\varphi''(0)=h^2\frac{d^2f}{dx^2}+2hk\frac{d^2f}{dxdy}+k^2\frac{d^2f}{dy^2},$$

. . . .

$$\varphi^n\ (0)=h^n\frac{d^nf}{dx^n}+\frac{n}{1}h^{n-1}k\frac{d^nf}{dx^{n-1}dy}+\cdots+k^n\frac{d^nf}{dy^n}\ (^*).$$

3° D'après les remarques précédentes, on peut, au moyen de $f(x, y)$, former

$$\varphi^{n+1}(\theta t)=h^{n+1}\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}+\frac{n+1}{1}h^nk\frac{d^{n+1}f}{dx^ndy}+\cdots+k^{n+1}\frac{d^{n+1}f}{dy^{n+1}},$$

pourvu que, *dans le résultat, on remplace* x *et* y, *respectivement, par* x + θth *et* y + θtk.

4° Substituant ces diverses valeurs dans l'équation (1), et faisant $t=1$, comme il a été dit, on a donc, finalement :

$$\left.\begin{aligned}f(x+h,y+k)=f(x,y)&+\left(h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}\right)\\&+\frac{1}{1.2}\left(h^2\frac{d^2f}{dx^2}+2hk\frac{d^2f}{dxdy}+k^2\frac{d^2f}{dy^2}\right)+\cdots\\&+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(h^n\frac{d^nf}{dx^n}+\cdots+k^n\frac{d^nf}{dy^n}\right)+\mathrm{R};\end{aligned}\right\}(2)$$

$$\mathrm{R}=\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)}\left(h^{n+1}\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}+\cdots+k^{n+1}\frac{d^{n+1}f}{dy^{n+1}}\right):(3)$$

la seconde formule suppose que x *et* y *ont été remplacés, respectivement, par* x + θh, y + θk.

(*) Dans ces nouvelles formules, f représente $f(x, y)$.

95. *Remarque.* — A cause de la complication de la formule (2), on l'écrit quelquefois sous cette forme *symbolique* :

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+k)=f(x,y)+\left(h\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)+\frac{1}{1.2}\left(h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}\right)^2 \\ +\cdots+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}\right)^n+\mathrm{R}. \end{aligned}\right\}(4)$$

Pour appliquer cette nouvelle formule, on développe les puissances du binôme $h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}$, et l'on remplace, dans chaque terme du développement,

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 \text{ par } \frac{d^2f}{dx^2},\quad \left(\frac{df}{dx}\right)^3 \text{ par } \frac{d^3f}{dx^3}, \text{ etc.}$$

96. On trouve, de la même manière,

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+\left(h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}+l\frac{df}{dz}\right) \\ +\frac{1}{1.2}\left(h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}+l\frac{df}{dz}\right)^2+\cdots \\ +\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}+l\frac{df}{dz}\right)^n \\ +\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\left(h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}+l\frac{df}{dz}\right)^{n+1}: \end{aligned}\right\}(5)$$

dans le dernier terme, x, y, z doivent être remplacés, à la fin du calcul, par $x+\theta h$, $y+\theta k$, $z+\theta l$.

Si, par exemple, $n=2$:

$$f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+\left(h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}+l\frac{df}{dz}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2f}{dx^2}h^2+\frac{d^2f}{dy^2}k^2+\frac{d^2f}{dz^2}l^2+2\frac{d^2f}{dydz}kl+2\frac{d^2f}{dzdx}lh+2\frac{d^2f}{dxdy}hk\right]+\mathrm{R}.$$

Applications.

97. Soit

$$f(x, y) = l(x, y) = lx + ly.$$

On a

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{df}{dy} = \frac{1}{y}, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = -x^{-2}, \quad \frac{d^2f}{dxdy} = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = -y^{-2}, \quad \frac{d^3f}{dx^3} = 2x^{-3}, \quad \frac{d^3f}{dy^3} = 2y^{-3}, \ldots$$

Si l'on suppose $n = 2$ dans les formules (2), (3), on trouve

$$l\left[(x+h)(x+k)\right] = l(xy) + \frac{h}{x} + \frac{k}{y} - \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{x^2} + \frac{k^2}{y^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{3}\left[\frac{h^3}{(x+\theta h)^3} + \frac{k^3}{(y+\theta k)^3}\right].$$

Ce résultat est exact; car

$$l\left[(x+h)(y+k)\right] = l(x+h) + l(y+k),$$
$$l(x+h) = lx + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{(x+\theta h)^3},$$
$$l(y+k) = ly + \frac{k}{y} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{k^3}{(y+\theta k)^3}.$$

98. Soit, comme second exemple,

$$f(x, y) = \sin(x+y);$$

d'où résultent :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = \cos(x+y), \quad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d^2f}{dy^2} = -\sin(x+y);$$

puis

$$\sin(x+h+y+k) = \sin(x+y) + (h+k)\cos(x+y)$$
$$- \frac{1}{2}(h+k)^2 \sin(x+\theta h+y+\theta k).$$

Pour vérifier cette relation, posons

$$x + y = \alpha, \quad h + k = \beta;$$

alors

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \beta\cos\alpha - \frac{1}{2}\beta^2 \sin(\alpha + \theta\beta);$$

ce qui est conforme à la formule de Taylor (**78**).

Propriétés des fonctions homogènes.

99. Par extension de ce qui a lieu pour les polynômes entiers, on dit que $f(x, y, z, \ldots)$ est *homogène,* si

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots) = \lambda^m f(x, y, z, \ldots): \qquad (6)$$

m est le *degré d'homogénéité.*

D'après cette définition, $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ est une fonction homogène, du premier degré; de même, $\sin\frac{x}{y} + lx - ly$ est homogène, du degré zéro; etc.

100. Cela posé, soit $\lambda = 1 + \alpha$: l'égalité (6) se change en

$$f(x + \alpha x, y + \alpha y, z + \alpha z, \ldots) = (1 + \alpha)^m f(x, y, z, \ldots). \qquad (7)$$

Le premier membre, développé suivant les puissances et les produits des *accroissements* αx, αy, αz, ... devient

$$f(x, y, z, \ldots) + \frac{\alpha}{1}\left(\frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y + \frac{df}{dz}z + \cdots\right) + \frac{\alpha^2}{1.2}\left(\frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y + \frac{df}{dz}z + \cdots\right)^2 + \cdots$$

Identifiant cette série avec $(1 + \alpha)^m f(x, y, z, \ldots)$, on trouve :

$$\frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y + \frac{df}{dz} + \cdots = mf(x, y, z, \ldots), \qquad (8)$$

$$\left(\frac{df}{dx}x+\frac{df}{dy}y+\frac{df}{dz}z+\cdots\right)^2=m(m-1)f(x,y,z,\ldots), \quad (9)$$

$$\left(\frac{df}{dx}x+\frac{df}{dy}y+\frac{df}{dz}z+\cdots\right)^3=m(m-1)(m-2)f(x,y,z,\ldots), \quad (10)$$

. . . .

De ces relations (*), la première et la plus importante constitue le *Théorème des fonctions homogènes,* que l'on peut énoncer ainsi :

La somme des dérivées partielles d'une fonction homogène, respectivement multipliées par la variable correspondante, égale le produit de la fonction par son degré.

101. *Application.* — Soit

$$f=\frac{x}{(y+z)^2}+\frac{y}{(z+x)^2}+\frac{z}{(x+y)^2}.$$

Les valeurs des dérivées particlles sont :

$$\frac{1}{(y+z)^2}-\frac{2y}{(z+x)^3}-\frac{2z}{(x+y)^3},$$

$$\frac{1}{(z+x)^2}-\frac{2z}{(x+y)^3}-\frac{2x}{(y+z)^3},$$

$$\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{2x}{(y+z)^3}-\frac{2y}{(z+x)^3}.$$

Multipliant par x, y, z, et faisant la somme des produits, on trouve

$$x\frac{df}{dx}+y\frac{df}{dy}+z\frac{df}{dz}=-\frac{x}{(y+z)^2}-\frac{y}{(z+x)^2}-\frac{z}{(x+y)^2}=-f(x,y,z);$$

conformément au théorème.

(*) On ne doit pas oublier que les premiers membres des égalités (9), (10), ... sont écrits sous forme symbolique, et qu'ils doivent être développés.

102. *Autre application.* — Soit une équation

$$F(x, y, z, ...) = 0, \tag{11}$$

dans laquelle le premier membre est un polynôme entier, de degré m, mais *non homogène*. Décomposons-le en parties homogènes, dont les degrés soient m, $m - 1$, ... 0; de manière que

$$F(x, y, z, ...) = U_m + U_{m-1} + \cdots + U_1 + U_0.$$

Nous aurons, par le théorème précédent,

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + \cdots = mU_m + (m-1)U_{m-1} + \cdots + U_1; \tag{12}$$

ou bien, en retranchant du second membre la quantité *nulle*

$$m(U_m + U_{m-1} + \cdots + U_1 + U_0):$$

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + \cdots = -U_{m-1} - 2U_{m-2} - \cdots - mU. \tag{13}$$

Cette formule est utile dans la *Théorie des tangentes*.

CHAPITRE IX.

EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES IMAGINAIRES.

Exponentielles imaginaires.

103. Reprenons les formules

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots, \tag{1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots, \tag{2}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots, \qquad (3)$$

établies dans le Chapitre VII.

Afin de voir nettement quelle est la relation qui existe entre ces séries, remplaçons, dans la troisième, x par $x\sqrt{-1}$: elle devient

$$1 + \frac{x}{1}\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots,$$

ou

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots + \sqrt{-1}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\right)$$
$$= \cos x + \sqrt{-1}\sin x.$$

On peut donc prendre, *comme définition* de $e^{x\sqrt{-1}}$, l'équation

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x}{1}\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots;$$

et l'on a la relation cherchée, découverte par Euler :

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x; \qquad (4)$$

puis, en changeant x en $-x$:

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x. \qquad (5)$$

104. Par suite,

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \\ \operatorname{tg} x &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Ces valeurs sont fréquemment employées dans certaines recherches (*).

(*) Nous les avons déjà citées (p. 178).

105. Les formules (1), (2), si l'on y remplace x par $x\sqrt{-1}$, deviennent

$$\sin\left(x\sqrt{-1}\right)=\sqrt{-1}\left[\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right], \quad (7)$$

$$\cos\left(x\sqrt{-1}\right)=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\cdots: \quad (8)$$

celles-ci *définissent* $\sin\left(x\sqrt{-1}\right)$ et $\cos\left(x\sqrt{-1}\right)$. Pour les simplifier, prenons les relations :

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots,$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots;$$

Il en résulte :

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\cdots,$$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots;$$

et par conséquent, au lieu de (7), (8) :

$$\left.\begin{aligned}\sin\left(x\sqrt{-1}\right)&=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\sqrt{-1},\\ \cos\left(x\sqrt{-1}\right)&=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

106. *Remarques.* — I. Ces nouvelles relations ne diffèrent, des deux premières formules (6), que par le changement de x en $x\sqrt{-1}$. Les unes et les autres sont autant de preuves de l'utilité des imaginaires.

II. D'après les formules (4), (5), la fonction $e^{x\sqrt{-1}}$ a des propriétés complètement différentes de celles qui appartiennent à e^x : 1° elle est *périodique;* 2° quand x augmente indéfiniment, elle ne tend vers aucune limite déterminée.

Opérations sur les exponentielles imaginaires.

107. *Produits et quotients.* — Quand les exposants sont réels, on a

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}, \quad e^x : e^y = e^{x-y}.$$

Les mêmes règles subsistent si x et y sont remplacés par $x\sqrt{-1}$ et $y\sqrt{-1}$. En effet, d'après la relation (4) :

$$e^{x\sqrt{-1}} \cdot e^{y\sqrt{-1}} = \left(\cos x + \sqrt{-1}\sin x\right)\left(\cos y + \sqrt{-1}\sin y\right),$$

$$e^{x\sqrt{-1}} : e^{y\sqrt{-1}} = \frac{\cos x + \sqrt{-1}\sin x}{\cos y + \sqrt{-1}\sin y};$$

ou (Alg., **217**, **218**) :

$$e^{x\sqrt{-1}} \cdot e^{y\sqrt{-1}} = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y),$$

$$e^{x\sqrt{-1}} : e^{y\sqrt{-1}} = \cos(x-y) + \sqrt{-1}\sin(x-y).$$

Les seconds membres de ces égalités représentent, respectivement,

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}}, \quad e^{(x-y)\sqrt{-1}};$$

donc enfin

$$e^{x\sqrt{-1}} \cdot e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}, \tag{10}$$

$$e^{x\sqrt{-1}} : e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x-y)\sqrt{-1}}. \tag{11}$$

108. *Puissances.* — Il résulte immédiatement, de la démonstration précédente, que

$$\left(e^{x\sqrt{-1}}\right)^m = e^{mx\sqrt{-1}}, \tag{12}$$

du moins *si l'exposant* m *est entier positif.*

109. *Remarque.* — L'équation (12) ne diffère pas de la *Formule de Moivre* (Alg., **219**).

110. *Exposants complexes.* — Le symbole $e^{x+y\sqrt{-1}}$ est *défini* par la série

$$1+\frac{x+y\sqrt{-1}}{1}+\frac{(x+y\sqrt{-1})^2}{1.2}+\dots+\frac{(x+y\sqrt{-1})^n}{1.2\dots n}+\dots,$$

laquelle est toujours convergente (**89**). Pour vérifier que ce symbole représente le produit de e^x par $e^{y\sqrt{-1}}$, cherchons la somme s de la série.

Dans le développement de $(x+y\sqrt{-1})^n$, y^p a pour coefficient

$$\frac{1.2.3\dots n}{1.2.3\dots p.1.2\dots(n-p)}x^{n-p}(\sqrt{-1})^p.$$

Si donc la série est mise sous la forme (*)

$$A_0+A_1y+A_2y^2+\dots+A_py^p+\dots,$$

on a

$$A_p=\frac{(\sqrt{-1})^p}{1.2.3\dots p}\sum_{n=p}^{n=\infty}\frac{x^{n-p}}{1.2.3\dots(n-p)},$$

ou (3)

$$A_p=\frac{(\sqrt{-1})^p}{1.2.3\dots p}e^x.$$

Par suite,

$$s=e^x\sum_0^\infty\frac{y^p(\sqrt{-1})^p}{1.2.3\dots p},$$

ou

$$s=e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)=e^x.e^{y\sqrt{-1}}.$$

Conséquemment,

$$e^x.e^{y\sqrt{-1}}=e^{x+y\sqrt{-1}}, \qquad (13)$$

et

$$e^{x+y\sqrt{-1}}=e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y). \qquad (14)$$

(*) Nous admettons le Théorème de Dirichlet (ALG., **88**).

111. *Autre démonstration.* — Dans l'égalité

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x+y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \ldots, \quad (15)$$

posons

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Au moyen du Théorème de Moivre, la série devient

$$\left.\begin{array}{l}
1 + \frac{\rho}{1}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + \frac{\rho^2}{1.2}(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi) \\
\quad + \frac{\rho^3}{1.2.3}(\cos 3\varphi + \sqrt{-1}\sin 3\varphi) + \cdots \\
= 1 + \frac{\rho}{1}\cos\varphi + \frac{\rho^2}{1.2}\cos 2\varphi + \frac{\rho^3}{1.2.3}\cos 3\varphi + \cdots \\
\quad + \sqrt{-1}\left(\frac{\rho}{1}\sin\varphi + \frac{\rho^2}{1.2}\sin 2\varphi + \frac{\rho^3}{1.2.3}\sin 3\varphi + \cdots\right) \\
= e^{\rho\cos\varphi + \sqrt{-1}.\rho\sin\varphi}.
\end{array}\right\} (16)$$

L'application de la Formule de Mac-Laurin donne, par un calcul facile :

$$e^{\rho\cos\varphi}\cos(\rho\sin\varphi) = 1 + \frac{\rho}{1}\cos\varphi + \frac{\rho^2}{1.2}\cos 2\varphi + \frac{\rho^3}{1.2.3}\cos 3\varphi + \cdots,$$

$$e^{\rho\cos\varphi}\sin(\rho\sin\varphi) = \quad \frac{\rho}{1}\sin\varphi + \frac{\rho^2}{1.2}\sin 2\varphi + \frac{\rho^3}{1.2.3}\sin 3\varphi + \cdots$$

Ainsi l'égalité (16) se transforme en

$$e^{\rho\cos\varphi + \sqrt{-1}.\rho\sin\varphi} = e^{\rho\cos\varphi}\left[\cos(\rho\sin\varphi) + \sqrt{-1}\sin(\rho\sin\varphi)\right].$$

Mais (**108**)

$$\cos(\rho\sin\varphi) + \sqrt{-1}\sin(\rho\sin\varphi) = e^{\sqrt{-1}\rho\sin\varphi};$$

donc

$$e^{\rho\cos\varphi + \sqrt{-1}.\rho\sin\varphi} = e^{\rho\cos\varphi} \times e^{\sqrt{-1}\rho\sin\varphi},$$

ou bien

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x \times e^{y\sqrt{-1}}.$$

112. *Remarques.* — I. Les deux dernières égalités généralisent les formules (10) et (4).

II. Si l'on propose de mettre le premier membre de l'équation (14) sous la forme *normale* $a+b\sqrt{-1}$, on aura

$$a = e^x \cos y, \quad b = e^x \sin y. \tag{17}$$

113. *Inversement,* on peut remplacer l'imaginaire

$$a+b\sqrt{-1}$$

par une expression telle que $e^{x+y\sqrt{-1}}$. A cet effet, observons que les équations (17) donnent :

$$e^x = +\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\cos y = \frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin y = \frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Soit φ l'arc, compris entre 0 et 2π, déterminé par les équations

$$\cos\varphi = \frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2}}; \tag{18}$$

alors

$$y = 2k\pi + \varphi,$$

k étant un entier quelconque.

D'ailleurs

$$x = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,(a^2+b^2);$$

donc enfin

$$a+b\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{l}(a^2+b^2)+(2k\pi+\varphi)\sqrt{-1}}. \tag{19}$$

Ainsi, *l'équation*

$$a+b\sqrt{-1} = e^{x+y\sqrt{-1}} \tag{20}$$

est vérifiée par une infinité de valeurs de y.

Logarithmes imaginaires.

114. Dans cette même équation (20), $x+y\sqrt{-1}$ est, *par définition*, le logarithme népérien de $a+b\sqrt{-1}$. Autrement dit

$$l\left(a+b\sqrt{-1}\right)=\frac{1}{2}l(a^2+b^2)+(2k\pi+\varphi)\sqrt{-1}, \quad (21)$$

l'arc φ, moindre que 2π, étant toujours déterminé par *les deux formules* (18).

115. Considérons quelques cas particuliers de la formule (21); et, pour éviter toute ambiguïté, remplaçons, dans le premier membre, la caractéristique *l* par la lettre λ: $\lambda\left(a+b\sqrt{-1}\right)$ représente la valeur la plus générale de $x+y\sqrt{-1}$.

1° $b=0$. L'équation devient

$$\lambda(a)=\frac{1}{2}l(a^2)+(2k\pi+\varphi)\sqrt{-1}.$$

De plus, $\varphi=0$ ou $\varphi=\pi$, selon que a est $\gtrless 0$. Donc, dans le premier cas,

$$\lambda(a)=\frac{1}{2}l(a^2)+2k\pi\sqrt{-1};$$

et, dans le second, (22)

$$\lambda(a)=\frac{1}{2}l(a^2)+(2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Ainsi, *toute quantité réelle a une infinité de logarithmes.*

2° Si, avec $b=0$, on suppose $a=+N$, N étant un nombre, on a $\varphi=0$; puis

$$\lambda(N)=lN+2k\pi\sqrt{-1}: \quad (23)$$

tout nombre a un seul logarithme réel, et une infinité de logarithmes imaginaires.

3° $b=0$, $a=-\text{N}$. A cause de $\cos\varphi=-1$, on trouve

$$\lambda(-\text{N})=\text{l}\,\text{N}+(2k+1)\pi\sqrt{-1}. \qquad (24)$$

Ainsi, *les quantités négatives n'ont pas de logarithmes réels* (ALG., **86**).

4° Soit $\text{N}=1$: les relations (23), (24) deviennent

$$\lambda(1)=2k\pi\sqrt{-1}, \quad \lambda(-1)=(2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

5° Cette dernière formule est comprise dans la suivante :

$$\lambda\left(b\sqrt{-1}\right)=\frac{1}{2}\text{l}\,(b^2)+\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{-1}. \qquad (25)$$

6° En particulier,

$$\lambda\left(\sqrt{-1}\right)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{-1}. \qquad (26)$$

Applications des théories précédentes.

116. *Série de Leibniz.* — Dans le cas où $x=\frac{\pi}{2}$, l'équation d'Euler (**102**) devient

$$e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}=\sqrt{-1};$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\text{l}\left(\sqrt{-1}\right)}{\sqrt{-1}}: \qquad (27)$$

cette expression de $\frac{\pi}{2}$, sous forme imaginaire, est contenue dans la formule (26).

Pour en tirer un résultat réel, Wronski fait attention que

$$\sqrt{-1}=\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}};$$

donc

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \, \mathrm{l} \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}. \tag{28}$$

Mais, pour toute valeur de z dont le module est suffisamment petit :

$$\mathrm{l} \frac{1+z}{1-z} = 2\left[\frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right];$$

donc, d'après la *définition* des exponentielles et des logarithmes imaginaires,

$$\mathrm{l} \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right];$$

car la série est convergente. Substituant dans l'équation (28), on trouve

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots;$$

ce qui est la Série de Leibniz (ALG., 1[illegible]).

117. PROBLÈME. — *Résoudre l'équation*

$$(a + b\sqrt{-1})^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}, \tag{29}$$

x *et* y *étant des inconnues réelles.*

Afin de *définir* le premier membre, on peut s'appuyer sur les propriétés des logarithmes imaginaires, et écrire

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})\, \mathrm{l}(a + b\sqrt{-1}) = \mathrm{l}(x + y\sqrt{-1}). \tag{30}$$

Si l'on conserve les notations précédentes (**114**), on a

$$\mathrm{l}(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\, \mathrm{l}(a^2 + b^2) + (2k\pi + \varphi)\sqrt{-1}.$$

De même,

$$\mathrm{l}\left(x+y\sqrt{-1}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{l}(x^2+y^2)+(2k'\pi+\theta)\sqrt{-1},$$

en supposant

$$\cos\theta=\frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\rho},$$

$$\sin\theta=\frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\rho}.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (30) se décompose en

$$\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{l}(a^2+b^2)-\beta(2k\pi+\varphi)=\mathrm{l}\rho,$$

$$\alpha(2k\pi+\varphi)+\frac{1}{2}\beta\,\mathrm{l}(a^2+b^2)=2k'\pi+\theta.$$

On a donc, finalement :

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{l}\rho&=\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{l}(a^2+b^2)-\beta(2k\pi+\varphi),\\ \theta&=\alpha(2k\pi+\varphi)+\frac{1}{2}\beta\,\mathrm{l}(a^2+b^2)-2k'\pi,\\ x&=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

Ainsi, *l'équation* (29) *admet une infinité de solutions réelles.*

118. *Explication d'un paradoxe.* — Si, dans les relations (29) et (31), on prend

$$a=1,\quad b=0,\quad \alpha=0,\quad \beta=1,$$

on trouve

$$\mathrm{l}\rho=-2k\pi,\quad \theta=-2k'\pi,$$
$$x=e^{-2k\pi},\quad y=0;$$

et, par conséquent,

$$1^{\sqrt{-1}}=e^{-2k\pi}:\quad(32)$$

ce résultat s'accorde avec la formule (23).

Maintenant, si l'on fait attention que

$$1 = \cos 2n\pi + \sqrt{-1} \sin 2n\pi = e^{2n\pi\sqrt{-1}},$$

on arrive à cette nouvelle relation :

$$\left(e^{2n\pi\sqrt{-1}}\right)^{\sqrt{-1}} = e^{-2n\pi}.$$

Ainsi : 1° *en élevant, à la puissance marquée par* $\sqrt{-1}$, *l'exponentielle* $e^{2n\pi\sqrt{-1}}$, *on obtient, non la quantité unique* $e^{-2n\pi}$, *mais une infinité de valeurs réelles, formant les termes d'une progression par quotient;*

2° *La règle exprimée par la formule* $(e^p)^m = e^{pm}$ *ne subsiste plus quand l'exposant* m *est imaginaire* (*).

CHAPITRE X.

INDÉTERMINATIONS APPARENTES.

Valeurs $\frac{0}{0}$.

119. *Fractions rationnelles.* — Une fraction, $y = \frac{f(x)}{F(x)}$, peut prendre la forme $\frac{0}{0}$ pour une valeur particulière a de x, sans cependant être indéterminée. Par exemple,

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

devient $\frac{0}{0}$ pour $x = 1$. Mais comme, avant de faire cette

(*) Faute d'avoir égard à ce cas d'exception, on pourrait conclure, des *égalités exactes :*

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}} = e^{6\pi\sqrt{-1}} = \ldots,$$

les *égalités absurdes :*

$$e^{-2\pi} = e^{-4\pi} = e^{-6\pi} = \ldots$$

hypothèse, on aurait pu diviser les deux termes par $x-1$, et écrire $y=\frac{x+2}{x+1}$, il s'ensuit que la *vraie valeur* cherchée est $\frac{3}{2}$.

D'après cela, si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux *polynômes entiers*, on les divise, l'un et l'autre, par $x-a$, et l'on met l'expression *générale* de y sous la forme $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$. Faisant ensuite $x=a$, on a, pour la *vraie valeur*, $\frac{f_1(a)}{\varphi_1(a)}$.

120. *Remarque.* — Si la fraction $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$ devient encore $\frac{0}{0}$ pour $x=a$, on divise les deux termes par $x-a$; et ainsi de suite.

121. En résumé, si *la plus haute puissance* de $x-a$, qui divise $f(x)$ et $\varphi(x)$, est $(x-a)^p$, et que $f_p(x)$, $\varphi_p(x)$ soient les quotients correspondants, la vraie valeur de y sera $\frac{f_p(a)}{\varphi_p(a)}$: cette vraie valeur est *nulle, infinie* ou *différente de* 0 *et de l'infini,* suivant que $f_p(x)$ est encore divisible par $x-a$, ou que φ_p est encore divisible par ce binôme, ou enfin que ces deux polynômes (comme nous l'avons supposé) ne contiennent plus, *simultanément,* le facteur $x-a$.

122. *Généralisation.* — Supposons que $f(x)$ et $\varphi(x)$ soient deux fonctions quelconques, s'annulant pour $x=a$. A cause de $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$, on a identiquement

$$y=\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}};$$

ou, en supposant $x=a+h$:

$$y=\frac{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\dfrac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}}.$$

Si h diminue indéfiniment, le numérateur, d'après la définition des dérivées, tend vers $f'(a)$. De même,

$$\lim \frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} = \varphi'(a);$$

donc

$$\lim y = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Ainsi, *pour trouver la vraie valeur*, y_0, *d'une fraction* $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *qui se présente sous la forme* $\frac{0}{0}$ *quand* $x = a$, *on prend le rapport* $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *des dérivées des deux termes, et l'on y fait* $x = a$.

123. Si la fraction $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ devient encore $\frac{0}{0}$ pour $x=a$, la vraie valeur est $\frac{f''(a)}{\varphi''(a)}$; et ainsi de suite.

124. *Autre démonstration.* — A cause de $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$, on a, par le Théorème de Taylor :

$$f(a+h) = hf'(a+\theta h), \quad \varphi(a+h) = h\varphi'(a+\theta_1 h);$$

donc

$$\lim \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \lim \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta_1 h)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

125. En général, si

$$f(a)=0,\ f'(a)=0,\ f''(a)=0, \ldots\ \varphi(a)=0,\ \varphi'(a)=0,\ \varphi''(a)=0, \ldots$$

et que $f^{(p)}(x)$, $\varphi^{(p)}(x)$ soient les deux premières dérivées qui ne s'annulent pas simultanément, on a

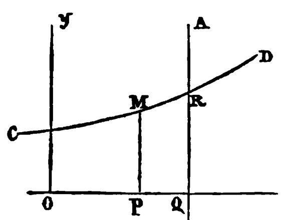
$$f(a+h) = \frac{h^p}{1.2.3\ldots p} f^{(p)}(a+\theta h),$$

$$\varphi(a+h) = \frac{h^p}{1.2.3\ldots p} \varphi^{(p)}(a+\theta_1 h);$$

puis

$$y_0 = \lim \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f^p(a)}{\varphi^p(a)}.$$

126. *Interprétation géométrique.* — Lorsque $f(x)$ et $\varphi(x)$ s'annulent pour $x=a$, l'équation



$$y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

représente une parallèle AB à l'axe des ordonnées, et une courbe CD. La fraction devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$, parce que tous les points de la droite AB ont pour abscisse a; mais parmi ceux-ci, il y en a un, le point R, qui appartient à la courbe CD : trouver la *vraie valeur* de la fraction, c'est déterminer $QR = \lim PM$. Si l'on fait abstraction de AB, on peut chasser le dénominateur, et écrire

$$y\varphi(x)=f(x);$$

d'où, en prenant les dérivées :

$$y\varphi'(x)+y'\varphi(x)=f'(x);$$

puis

$$y_a\varphi'(a)=f'(a).$$

127. *Remarque.* — Si l'on voulait déterminer le coefficient angulaire de la tangente en R, on devrait prendre la dérivée seconde :

$$y\varphi''(x)+2y'\varphi'(x)+y''\varphi(x)=f''(x);$$

et l'on aurait

$$y_a\varphi''(a)+2y'_a\varphi'(a)=f''(a);$$

puis

$$y'_a=\frac{f''(a)-\dfrac{f'(a)}{\varphi'(a)}\varphi''(a)}{2\varphi'(a)}=\frac{\varphi'(a)f''(a)-f'(a)\varphi''(a)}{2\varphi'^2(a)}:$$

cette valeur n'est que *la moitié* de la dérivée de y_a (a étant considérée comme une variable).

Applications.

128. 1° $y = \dfrac{e^x - 2\cos x + e^{-x}}{\sin x}$, *pour* $x = 0$:

$$y_0 = \left(\frac{e^x + 2\sin x - e^{-x}}{\cos x}\right)_0 = 0.$$

2° $y = \dfrac{e^x - 2\cos x + e^{-x}}{\sin^2 x}$, *pour* $x = 0$:

$$y_0 = \left(\frac{e^x + 2\sin x - e^{-x}}{2\sin x \cos x}\right)_0 = \left(\frac{e^x + 2\cos x + e^{-x}}{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}\right)_0 = 2.$$

3° $y = \dfrac{l(1 + x)}{x}$, *pour* $x = 0$:

$$y_0 = \left(\frac{1}{1 + x}\right)_0 = 1.$$

Ordre d'un infiniment petit.

129. La fraction $\frac{e^x - 2\cos x + e^{-x}}{\sin^2 x}$, prise pour exemple, tend vers la limite 2 quand x converge vers 0. Il en serait de même, évidemment, pour la fraction $\frac{e^x - 2\cos x + e^{-x}}{x^2}$; donc, x étant considéré comme infiniment petit *principal*, la fonction $z = e^x - 2\cos x + e^{-x}$ est un infiniment petit du *deuxième ordre*. Les développements en séries conduisent à la même conséquence; car

$$e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots;$$

et, par suite,

$$z = 4\left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^6}{1.2.3\ldots6} + \cdots\right).$$

130. *Remarques.* — I. En général, pour déterminer

l'*ordre* d'une fonction infiniment petite y, on cherche quelle est la valeur de m qui donne

$$\lim \frac{y}{x^m} = A$$

pour $x=0$, A n'étant ni nul ni infini (*).

II. Quelquefois, l'emploi des séries est plus commode que l'application de la règle ordinaire (**121**).

121. *Exemple. — Quel est l'ordre de*

$$y = x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\operatorname{tg} x,$$

x étant infiniment petit principal?

On a

$$y = \frac{3x\cos x - 2\sin x\cos x - \sin x}{3\cos x} = \frac{3x\cos x - \sin 2x - \sin x}{3\cos x}.$$

Le numérateur égale

$$3x\left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{24} - \cdots\right) - \left(2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} - \cdots\right)$$
$$- \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\right) + \cdots = -\frac{3}{20}x^5 + \cdots$$

Ainsi, y est du *cinquième ordre* (**). En même temps,

$$\lim \frac{y}{x^5} = -\frac{3}{20}.$$

(*) Cette règle résulte de la définition de l'*ordre* d'un infiniment petit (**4**).

(**) D'après cela, c, f désignant la *corde* et la *flèche* d'un petit segment circulaire, et t étant la longueur de chacune des tangentes aux extrémités de l'arc du segment, l'aire de cette figure est donnée, très-approximativement, par la formule

$$A = f\left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{3}t\right):$$

l'erreur est une quantité du cinquième ordre.

Valeurs $\frac{0}{0}$. — Suite.

132. L'emploi des séries est avantageux aussi quand la fraction dont on veut trouver la vraie valeur renferme des radicaux. Par exemple

$$y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x^2-x} - \sqrt[3]{x^2+x-2}}$$

devient $\frac{0}{0}$ pour $x=1$; et, si l'on prenait le rapport des dérivées des deux termes, *une difficulté plus grande* se présenterait, les deux termes de la nouvelle fraction devenant infinis en même temps. Au lieu d'appliquer la règle générale, posons

$$x = 1 + h;$$

nous aurons

$$y = \frac{\sqrt{h} + \sqrt[3]{h}}{\sqrt{h(1+h)} - \sqrt[3]{h(3+h)}} = \frac{h^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{2}}(1+h)^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{1}{3}}(3+h)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1 + h^{\frac{1}{6}}}{-(3+h)^{\frac{1}{3}} + h^{\frac{1}{6}}(1+h)^{\frac{1}{2}}}.$$

On pourrait maintenant, comme nous venons de l'indiquer, développer $(3+h)^{\frac{1}{3}}$ et $(1+h)^{\frac{1}{2}}$; mais, sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, on voit que $h=0$ donne

$$y_0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

133. Soit, comme seconde application,

$$y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x}}:$$

cette fraction devient $\frac{0}{0}$ pour $x=0$. Or, pour les valeurs de x suffisamment petites :

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots,$$

$$\sqrt[3]{1+x^2}=1+\frac{1}{3}x^2+\cdots,\quad \sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+\cdots,$$

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\cdots;$$

donc

$$y=\frac{\frac{1}{2}x-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\right)x^2+\cdots}{-\frac{1}{3}x+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\right)x^2+\cdots}=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\right)x+\cdots}{-\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\right)x+\cdots},$$

et

$$y_0=-\frac{3}{2}.$$

134. Dans le cas que nous considérons, on peut quelquefois faire subir, à la fraction donnée, une transformation *purement algébrique,* propre à introduire, dans les deux termes de la nouvelle fraction, un facteur commun *rationnel.* Soit, par exemple,

$$y=\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3}.$$

Si l'on multiplie les deux termes par $\sqrt{x+4}+2$, le numérateur sera rendu rationnel; et, comme il s'annulait pour $x=0$, il sera divisible par x. De même, en multipliant les deux termes par $\sqrt{x+9}+3$, on rend le nouveau dénominateur divisible par x. En résumé :

$$y=\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+4}+2},\quad y_0=\frac{3}{2}.$$

Fractions $\frac{\infty}{\infty}$.

135. Soit $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ une fraction qui prend cette forme indéterminée, lorsque $x=a$. Soit A la limite inconnue vers laquelle tend y quand x croît indéfiniment. En général,

$$y=\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}};$$

et, d'après l'hypothèse, cette nouvelle fraction devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$. Donc, d'après la règle (**132**),

$$\lim y=\text{A}=\lim\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\cdot\left[\frac{f(x)}{\varphi(y)}\right]^2=\frac{\varphi'(a)}{f'(a)}\cdot\text{A}^2.$$

On tire, de cette équation,

$$\text{A}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Ainsi, *pour trouver la vraie valeur d'une fraction* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *qui devient* $\frac{\infty}{\infty}$ *pour* x = a, *on prend le rapport des dérivées des deux termes, et l'on y remplace* x *par* a : la règle est la même que pour les fractions $\frac{0}{0}$.

136. La démonstration précédente est en défaut lorsque $\text{A}=0$ et lorsque $\text{A}=\pm\infty$; mais on va voir que la règle subsiste dans ces deux cas.

1° Soit $\text{A}=0$. Prenons

$$z=\frac{f(x)}{\varphi(x)}+g=\frac{f(x)+g\varphi(x)}{\varphi(x)}.$$

Cette fraction a pour limite g, et ses deux termes devien-

nent infinis pour $x=a$. Donc, par le théorème précédent, applicable parce que la *constante* g est supposée différente de zéro :

$$g=\frac{f'(a)+g\varphi'(a)}{\varphi'(a)}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}+g.$$

Ainsi

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}=0=\mathrm{A}.$$

2° Si

$$\mathrm{A}=\lim y=\pm\infty,\quad \lim\frac{1}{y}=\lim\frac{\varphi(x)}{f(x)}=0=\frac{\varphi'(a)}{f'(a)};$$

donc

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}=\infty=\mathrm{A}.$$

Applications.

127. 1° $$y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},\ \textit{pour } x=\infty.$$

Appliquant la règle (**125**), on trouve

$$\lim y=\lim\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}:$$

la même difficulté subsiste. Mais comme, d'après la dernière formule, $\lim y=\lim\frac{1}{y}$, il s'ensuit que $\lim y=1$. En effet,

$$y=\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}};$$

et les deux termes de la nouvelle fraction tendent vers l'unité.

2° $$y=\frac{\mathrm{l}\,x}{\cot x},\ \textit{pour } x=0.$$

$$\operatorname{Lim} y = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{-\sin^2 x}} = -\lim \frac{\sin^2 x}{x} = 0.$$

Autres formes indéterminées.

138. 1° $0 \times \infty$ se ramène à $\frac{0}{0}$ ou à $\frac{\infty}{\infty}$. Soit, par exemple, $y = x \cot x$: pour $x=0$, le premier facteur est nul, et le second, infini. Mais

$$y = \frac{x}{\operatorname{tg} x};$$

donc

$$y_0 = 1.$$

2° 1^∞ se réduit aisément à $\infty \times 0$, puis à $\frac{0}{0}$. En effet, si $y = u^v$, et que, pour $x=a$, on ait $u=1$, $v=\infty$, on trouve, en prenant les logarithmes : $\mathrm{l}y = v\,\mathrm{l}u$; donc $x=a$ donne $\mathrm{l}y = \infty \times 0$. Mais, x étant quelconque,

$$\mathrm{l}y = \frac{\mathrm{l}u}{\frac{1}{v}};$$

et cette fraction devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$.

Soit, par exemple,

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

ou

$$\mathrm{l}y = \frac{\mathrm{l}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Le rapport des dérivées des deux termes est, après suppression d'un facteur commun, $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. Donc

$$lim.\,l\,y = 1, \quad lim\; y = e;$$

résultat connu (ALG., **165**, III).

3° $\infty - \infty$ se ramène à l'une des deux formes principales. Soit

$$y = \text{séc}\, x - \text{tg}\, x : \textit{pour}\ x = \frac{\pi}{2},\ y = \infty - \infty.$$

Or,

$$\text{séc}\, x - \text{tg}\, x = \frac{1 - \sin x}{\cos x};$$

donc

$$\lim y = \lim \frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

139. Soit encore, comme exemple de ce troisième cas,

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{x}{\sqrt{x+3}-2} : \textit{pour}\ x = 1,\ y = \infty - \infty.$$

Si l'on réduit au dénominateur commun, on trouve d'abord

$$y = \frac{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+3}-2\right) - x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\left[\sqrt{x+3}-2\right]};$$

puis, en remplaçant x par $1+h$:

$$y = \frac{\sqrt{2+h}\left(\sqrt{4+h}-2\right) - (1+h)\sqrt{h}}{\sqrt{h}\left[\sqrt{4+h}-2\right]}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\left(1+\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{h}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right] - (1+h)\,h^{\frac{1}{2}}}{2h^{\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{h}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]}.$$

Le produit

$$\left(1+\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{h}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$$

$$=\left(1+\frac{1}{4}h-\frac{1}{32}h^2+\dots\right)\left(\frac{1}{8}h-\frac{1}{128}h^2+\dots\right)$$

$$=\frac{1}{8}h+\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{128}\right)h^2+\dots$$

Ainsi

$$y=\frac{2\sqrt{2}\left[\frac{1}{8}h+\dots\right]-h^{\frac{1}{2}}-\dots}{2h^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{8}h-\dots\right]}=\frac{-1+\frac{1}{4}\sqrt{2}h^{\frac{1}{2}}+\dots}{\frac{1}{4}h-\dots};$$

et

$$\lim y=y_0=\infty.$$

140. *Remarque.* — On serait arrivé plus rapidement au résultat en écrivant

$$y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}-\frac{x(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2-1}-x(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}.$$

Indéterminations réelles.

141. Tout ce qui précède suppose que la fonction proposée a une *vraie valeur;* ce qui n'arrive pas toujours. Par exemple, il n'y a pas à chercher la valeur de séc x — tg x *pour* x *infini* : la fonction est périodique; donc, x augmentant indéfiniment, elle ne tend vers aucune limite.

142. Enfin, il peut arriver que la fonction donnée ait une limite, et que la fonction à laquelle on la ramène n'en ait pas. Ainsi, $\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$ devient 1 pour $x=\pm\infty$ (malgré l'indétermination apparente); et la fraction $\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$, à laquelle conduit la règle générale, est indéterminée pour $x=\pm\infty$.

Des fractions $\dfrac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}$.

143. Soit, pour fixer les idées,

$$z = \frac{x^2 + 2y - 5x}{x^2 - 2y^2 - 2y}. \tag{1}$$

Si l'on suppose, *simultanément*, $x = 2$, $y = 1$, on trouve $z = \frac{0}{0}$. Pour essayer de déterminer la *vraie valeur* de z (en supposant qu'il y en ait une), faisons les deux substitutions *successivement* :

1° $x = 2$ donne

$$z = \frac{2y - 2}{4 - 2y^2 - 2y} = -\frac{y - 1}{y^2 + y - 2} = -\frac{1}{y + 2};$$

puis, pour $y = 1$: $z_1 = -\frac{1}{3}$.

2° $y = 1$ donne

$$z = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{x - 1}{x + 2};$$

puis, pour $x = 2$: $z_2 = \frac{1}{4}$.

Ainsi, *les deux vraies valeurs sont différentes.* Il y a plus : si l'on établit, entre x et y, une relation qui soit vérifiée par $x = 2$, $y = 1$, on peut trouver *une infinité de vraies valeurs de z*. Soit, par exemple,

$$y - 1 = \alpha(x - 2),$$

ou

$$y = 1 + \alpha(x - 2).$$

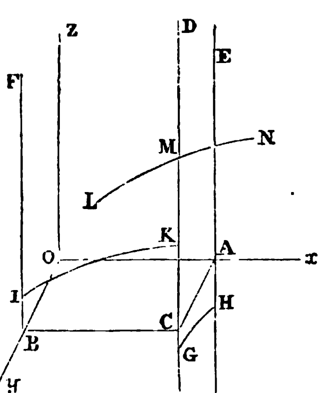
Alors

$$z = \frac{x^2 - 3x + 2 + 2\alpha(x - 2)}{x^2 - 2 - 4\alpha(x - 2) - 2\alpha^2(x - 2)^2 - 2 - 2\alpha(x - 2)}$$

$$= \frac{x - 1 + 2\alpha}{x + 2 - 6\alpha - 2\alpha^2(x - 2)}.$$

Pour $x=2$, cette fraction se réduit à $\frac{1+2z}{4-6z}$; en sorte qu'elle admet une infinité de valeurs différentes. On doit conclure, de cet exemple particulier, qu'une fraction $\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}$, qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$, $y=b$, est généralement *indéterminée.*

144. *Interprétation géométrique.* — L'équation (1) représente une surface qui contient la droite CD, dont les équations sont $x=2, y=1$. Si l'on fait d'abord $x=2$, on trouve la section de la surface par le plan CDAE : cette section, représentée par



$$z=-\frac{y-1}{y^2+y-2},$$

se compose de CD et d'une hyperbole GH qui coupe CD en un point G dont l'ordonnée est $-\frac{1}{3}$. Au contraire, $y=1$ donne la section faite par le plan BCDF : cette nouvelle section se compose de CD et de l'hyperbole IK. Enfin, si par la droite CD on fait passer une surface quelconque, l'intersection est une courbe LMN, coupant CD en un point M; et, quand la surface varie, le point M se déplace.

145. *Cas d'exception.* — Si, pour $x=a, y=b$, on trouve

$$\frac{df}{dx}:\frac{d\varphi}{dx}=\frac{df}{dy}:\frac{d\varphi}{dy}=\lambda,$$

la fraction proposée a une *vraie valeur,* égale à λ. En effet, à cause de $f(a,b)=0$, $\varphi(a,b)=0$, on a

$$\frac{f(a+h,b+k)}{\varphi(a+h,b+k)}=\frac{\frac{df}{da}h+\frac{df}{db}k+R}{\frac{d\varphi}{da}h+\frac{d\varphi}{db}k+R_1};$$

puis, comme les restes R, R_1 sont du deuxième ordre :

$$\lim \frac{f(a+h,\, b+k)}{\varphi(a+h,\, b+k)} = \frac{\dfrac{df}{da} + \dfrac{df}{db}\lim\dfrac{k}{h}}{\dfrac{d\varphi}{da} + \dfrac{d\varphi}{db}\lim\dfrac{k}{h}} = \lambda.$$

Soit, par exemple, la fraction

$$z = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - 1}{xy - \dfrac{\pi^2}{16}},$$

qui prend la forme $\frac{0}{0}$ quand on suppose

$$x = y = \frac{\pi}{4}.$$

Pour ces valeurs, les rapports

$$\frac{\operatorname{tg} y}{y \cos^2 x}, \quad \frac{\operatorname{tg} x}{x \cos^2 y}$$

deviennent égaux à $\frac{8}{\pi}$. Ce nombre est donc la *vraie valeur* de z (*).

Exercices.

I. Trouver ce que deviennent les fonctions

$$y_1 = \frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)}, \quad y_2 = \frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)},$$

$$y_3 = \frac{\operatorname{tg} \pi x - \pi x}{2x^2 \operatorname{tg} \pi x}, \quad y_4 = \frac{\operatorname{l} \operatorname{tg}(ax)}{\operatorname{l} \operatorname{tg} x},$$

$$y_5 = \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{(e^x - 1)^3}, \quad y_6 = \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x},$$

(*) De même, pour $x = 1$, $y = 1$, la *vraie valeur* de $\frac{x^2+y^2-x-y}{2xy-x-y}$ est 1.

$$y_7 = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{1}{2}ex}{x^2}$$

pour $x=0$.

Résultats :

$$y_1 = \frac{\pi^2}{6}, \quad y_2 = \frac{\pi^2}{8}, \quad y_3 = \frac{\pi^2}{6}, \quad y_4 = 1,$$

$$y_5 = \frac{1}{6}, \quad y_6 = 1, \quad y_7 = \frac{11}{24}e.$$

II. Quelles sont, pour $x=1$, les valeurs des fonctions

$$y_1 = \frac{x - \sqrt[3]{32x - 24x^2} + \sqrt[6]{40x^3 + 24x^4} - \sqrt[3]{2x^3 - 1}}{3(9x - 10) + \sqrt[4]{36x + 45x^4}\sqrt[3]{2x^3 - 1}},$$

$$y_2 = (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}, \quad y_3 = \frac{x^3 - 4x^2 + 7x - 2 - 2\sqrt{2x-1}}{x^2 - 2x - 1 + 2\sqrt{2x-1}},$$

$$y_4 = \frac{\cos ax - \cos a}{(1-x^2)^m} ?$$

Réponse :

$$y_1 = \frac{1}{24}, \quad y_2 = e^{\frac{2}{\pi}}, \quad y_3 = -5, \quad y_4 = (-1)^m \frac{a^m \cos\left(a + \frac{m\pi}{2}\right)}{2^m.1.2.3\ldots m}.$$

III. $$y = x - \frac{4}{15}\sin x + \frac{1}{15}\operatorname{tg} x - \frac{8}{5}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$$

est du *septième* ordre.

IV. Quelle est, pour $x=0$, la vraie valeur de $\frac{dy}{dx}$, résultant de l'équation

$$y^4 - 96y^2 + 100x^2 - x^4 = 0 ?$$

Réponse :

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{5}{\sqrt{24}}.$$

CHAPITRE XI.

MAXIMUMS ET MINIMUMS.

Fonctions explicites d'une seule variable.

146. On a vu, dans l'*Algèbre* (**164**) : 1° que, pour déterminer le maximum et le minimum de $y = f(x)$, on doit chercher les racines $a, b, c, \ldots$ de l'équation $f'(x) = 0$; 2° que $f(a)$ est *maximum* ou *minimum*, suivant que $f''(a)$ est < 0 ou > 0.

Le Théorème de Taylor permet de généraliser ces résultats. Supposons, en effet, qu'une racine a de $f'(x) = 0$ annule $f''(x), f'''(x), \ldots f^n(x)$, *sans annuler* $f^{n+1}(x)$. Alors

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{n+1}(a+\theta h).$$

Pour des valeurs de h suffisamment petites, le signe de $f^{n+1}(a+\theta h)$ est celui de $f^{n+1}(a)$; car $\lim f^{n+1}(a+\theta h) = f^{n+1}(a)$.

Il faut maintenant distinguer plusieurs cas :

1° $f^{n+1}(a) > 0$, n *pair*. Alors

$$f(a+h) > f(a),$$
$$f(a-h) < f(a),$$

h étant suffisamment petit :

Il n'y a *ni maximum ni minimum*.

2° $f^{n+1}(a) < 0$, n *pair*;

$$f(a+h) < f(a),$$
$$f(a-h) > f(a):$$

ni maximum ni minimum.

3° $f^{n+1}(a) > 0$, n *impair;*

$$f(a+h) > f(a),$$
$$f(a-h) > f(a):$$

minimum.

4° $f^{n+1}(a) > 0$, n *impair;*

$$f(a+h) < f(a),$$
$$f(a-h) < f(a):$$

maximum.

En résumé : *Si* x = a *annule* f′(x), f″(x), ... f^n(x), *sans annuler* f^{n+1}(x), *il y a maximum ou minimum suivant que* f^{n+1}(a) *est négative ou positive,* n *étant impair. Quand* n *est pair, il n'y a ni maximum ni minimum.*

Applications.

147. Premier exemple :

Soit
$$y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$z = \mathrm{l}\,y = \frac{\mathrm{l}\,x}{x};$$

d'où
$$z' = \frac{1 - \mathrm{l}\,x}{x^2}.$$

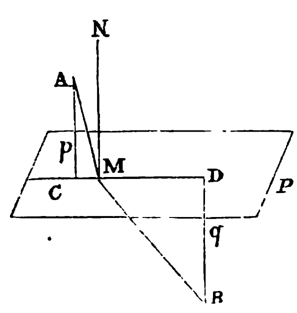
Cette dérivée s'annule pour $x = e$; d'ailleurs la fonction z est croissante de $x = 0$ à $x = 1$: il y a donc *maximum* pour $x = e$; et il n'est pas nécessaire de recourir à la dérivée seconde. Cependant, si on la cherche, on trouve

$$z'' = \frac{-x - 2x(1 - \mathrm{l}\,x)}{x^4};$$

donc, pour $x = 1$, $z'' < 0$; ce qui devait être. En résumé, le maximum de y est

$$\sqrt[e]{e} = 1{,}447\,998.$$

148. Deuxième exemple : *Quel chemin doit suivre un point lumineux, pour aller de A en B, dans le temps le plus court possible?* On suppose que les *milieux* auxquels appartiennent les points A, B, sont séparés par un plan P, et que les vitesses du point lumineux sont a, b.



Évidemment, le chemin cherché est composé de deux lignes droites. En outre, comme on le reconnait aisément, le plan AMB doit contenir la *normale* MN au plan P.

Cela posé, soient p, q, r les distances AC, BD, CD; et α, β les angles d'*incidence* et de *réfraction,* inconnus. Le temps employé par le mobile est

$$t = \frac{AM}{a} + \frac{BM}{b} = \frac{p}{a\cos\alpha} + \frac{q}{b\cos\beta}.$$

De plus,

$$r = p \operatorname{tg}\alpha + q \operatorname{tg}\beta.$$

On a donc, à cause de $dt = 0$:

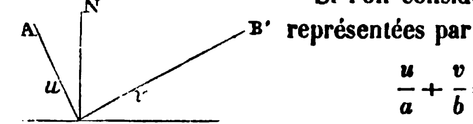
$$\frac{p\sin\alpha}{a\cos^2\alpha}d\alpha + \frac{q\sin\beta}{b\cos^2\beta}d\beta = 0, \quad \frac{pd\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{qd\beta}{\cos^2\beta} = 0.$$

On tire, de ces équations,

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}. \tag{1}$$

Celle-ci exprime la *loi de la réfraction,* trouvée par Descartes.

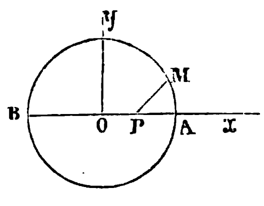
149. *Remarque.* — Soit B′ le point symétrique de B. Si l'on considère les courbes représentées par



$$\frac{u}{a}+\frac{v}{b}=\lambda,$$

chacune d'elles jouit de la propriété exprimée par l'équation (1). Ces courbes sont des *ovales de Descartes* (*). Parmi toutes ces ovales, il y en a une qui touche CD au point inconnu M.

150. TROISIÈME EXEMPLE : *Trouver, sur la circonférence* AB, *un point dont la distance au point donné* P *soit maximum ou minimum.*



Il est évident que B, A sont les points cherchés. Néanmoins, la règle ordinaire conduit à un autre résultat.

Soient

$$OA=a,\quad OP=c,\quad PM=u.$$

On a

$$u^2=(x-c)^2+y^2,\quad x^2+y^2=a^2;$$

d'où

$$u^2=a^2+c^2-2cx.$$

Si l'on égale à zéro $\frac{du}{dx}$, on trouve $c=0$; ce qui n'a pas de sens. Cette difficulté, signalée par M. Liouville, tient à ce que la variable x n'est pas complètement arbitraire : elle doit être comprise entre $-a$ et $+a$. Il en résulte que si l'on considère, par exemple, le point extrême A, on n'obtiendra pas les points voisins en faisant $x=a\pm h$; ce que l'on a supposé (ALG., **164**). Pour rentrer dans la théorie ordinaire, il suffit de remplacer x par une variable arbitraire.

(*) L'ellipse en est un cas particulier.

Soit, par exemple, $x=c+u\cos\omega$. Alors

$$u^2+2cu\cos\omega+c^2-a^2=0.$$

On tire, de cette équation :

$$(u+c\cos\omega)u'-cu\sin\omega=0,$$
$$(u+c\cos\omega)u''-2cu'\sin\omega-cu\cos\omega=0.$$

$u'=0$ donne $\sin\omega=0$, c'est-à-dire $\omega=0$, $\omega=\pi$. En même temps,

$$u''=\frac{cu\cos\omega}{u+c\cos\omega}.$$

1° Pour $\omega=0$, $u''=\frac{cu}{a+c}>0$: *minimum*;

2° $\omega=\pi$, $u''=\frac{-cu}{a-c}<0$: *maximum*;

ce qui est exact.

Fonctions implicites d'une seule variable.

151. Nous venons de traiter un exemple de ce genre de questions. Pour prendre un cas moins particulier, supposons qu'il s'agisse de déterminer le maximum d'une fonction u de x, déterminée par les équations

$$F(u, x, y, z)=0, \qquad (2)$$
$$f(u, x, y, z)=0, \qquad (3)$$
$$\varphi(u, x, y, z)=0. \qquad (4)$$

En général, il y aurait n équations entre la fonction u, la variable indépendante x et les $n-1$ variables auxiliaires $y, z, t, \ldots$

Si, entre les équations (2), (3), (4), on pouvait éliminer y et z; et si l'on pouvait ensuite résoudre l'équation finale, on aurait $u=\psi(x)$; après quoi l'on poserait $\frac{du}{dx}=0$, ou simplement $du=0$. Différencions donc les équations proposées, en supposant $du=0$. Nous aurons ainsi :

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = 0. \qquad (7)$$

Entre ces équations différentielles, qui détermineraient les valeurs des rapports $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, relatives au maximum de u, éliminons dx, dy, dz ; nous trouverons une équation

$$\varpi(u, x, y, z) = 0 : \qquad (8)$$

en la joignant aux proposées, on pourra, dans chaque cas particulier, calculer les valeurs de x, y, z, u, qui répondent à la question.

152. *Méthode des multiplicateurs.* — Au lieu d'opérer comme nous venons de le dire, on peut combiner, par addition, les équations (5), (6), (7), après avoir multiplié les deux membres de deux d'entre elles par des inconnues λ, μ. Si l'on choisit ces facteurs de manière à rendre nuls les coefficients de dx, dy, le coefficient de dz est pareillement nul, et l'on a

$$\frac{dF}{dx} + \lambda\frac{df}{dx} + \mu\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \lambda\frac{df}{dy} + \mu\frac{d\varphi}{dy} = 0,$$
$$\frac{dF}{dz} + \lambda\frac{df}{dz} + \mu\frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Ces nouvelles relations peuvent tenir lieu des équations (5), (6), (7); et, si l'on élimine λ et μ, on retombe sur l'équation (8); savoir :

$$\frac{dF}{dx}\left(\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{df}{dz}\right) + \frac{dF}{dy}\left(\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{df}{dx}\right)$$
$$+ \frac{dF}{dz}\left(\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{df}{dy}\right) = 0.$$

Fonctions de plusieurs variables indépendantes.

153. Soit, pour fixer les idées, $u = F(x, y, z)$. Si u est maximum lorsque $x = a$, $y = b$, $z = c$, on a, *par définition* du maximum,

$$F(a, b, c) - F(a \pm h, b \pm k, c \pm l) > 0,$$

pour des valeurs de h, k, l *suffisamment petites*. De là résulte, immédiatement, que les équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0$$

sont vérifiées par $x = a$, $y = b$, $z = c$. En effet, (96)

$$F(a+h, b+k, c+l) - F(a, b, c) = \left(h\frac{dF}{da} + k\frac{dF}{db} + l\frac{dF}{dc}\right) + R;$$

et, si les coefficients de h, k, l n'étaient pas nuls, on pourrait, en attribuant à ces quantités des signes convenables et des valeurs suffisamment petites, *rendre*

$$F(a - h, b - k, c - l) - F(a, b, c)$$

et

$$F(a + h, b + k, c + l) - F(a, b, c)$$

de signes contraires : $F(a, b, c)$ ne serait donc ni un maximum ni un minimum de $F(x, y, z)$.

154. *Autre démonstration.* — Soient d'abord $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$; x étant la variable indépendante. La condition

$$\frac{du}{dx} = 0$$

devient

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\varphi'(x) + \frac{dF}{dz}\psi'(x) = 0. \qquad (9)$$

Pour revenir au cas où y et z sont variables indépendantes, il suffit de supposer que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ soient des *fonctions arbitraires*. Alors l'équation (9), devant avoir lieu pour toutes les formes possibles de $\varphi'(x)$ et de $\psi'(x)$, se décompose en

$$\frac{dF}{dx}=0,\quad \frac{dF}{dy}=0,\quad \frac{dF}{dz}=0. \tag{10}$$

Conditions du maximum et du minimum.

153. *Fonction de deux variables.* — Soit d'abord

$$u=F(x, y).$$

Par ce qui vient d'être démontré,

$$F(x+h,y+k)-F(x,y)=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2F}{dx^2}h^2+2\frac{d^2F}{dxdy}hk+\frac{d^2F}{dy^2}k^2\right]+R,$$

x et y remplaçant a et b.

Nous admettons que, pour des valeurs de h, k suffisamment petites, le signe du second membre est celui du trinôme

$$\frac{d^2F}{dx^2}h^2+2\frac{d^2F}{dxdy}hk+\frac{d^2F}{dy^2}k^2=T.$$

Pour n'avoir à considérer qu'une seule variable, remplaçons k par $h\lambda$: abstraction faite du facteur positif h^2, T devient

$$\frac{d^2F}{dy^2}\lambda^2+2\frac{d^2F}{dxdy}\lambda+\frac{d^2F}{dx^2}.$$

Si ce nouveau trinôme est *négatif* quel que soit λ, $F(x, y)$ sera *maximum*.

Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir, simultanément :

$$\frac{d^2F}{dy^2}<0,\quad \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2F}{dx^2}\cdot\frac{d^2F}{dy^2}<0. \tag{11}$$

Telles sont les *conditions suffisantes* pour qu'il y ait maximum. De même, les conditions du *minimum* sont

$$\frac{d^2F}{dy^2} > 0, \quad \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2F}{dx^2} \cdot \frac{d^2F}{dy^2} < 0. \qquad (12)$$

156. *Remarques.* — I. Si les valeurs a, b, de x et y, qui annulent $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, annulaient aussi le trinôme T, les conditions du maximum et du minimum deviendraient beaucoup plus difficiles à établir : il n'y aurait même, dans la plupart des cas, ni maximum ni minimum.

II. Si l'on regarde h et k comme des coordonnées, on voit que l'équation

$$\frac{d^2F}{dx^2} h^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy} hk + \frac{d^2F}{dy^2} k^2 = -H$$

représente une *ellipse* proprement dite. Ceci se rapporte au cas du maximum. Dans le cas contraire, on est conduit à la relation

$$\frac{d^2F}{dx^2} h^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy} hk + \frac{d^2F}{dy^2} k^2 = +H :$$

à cause de $\frac{d^2F}{dy^2} > 0$, elle représente encore une *ellipse*.

157. *Fonction de trois variables.* — Soit maintenant

$$u = F(x, y, z).$$

En vertu des équations (10), on a

$$F(x + h, y + k, z + l) - F(x, y, z)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{d^2F}{dx^2}h^2 + \frac{d^2F}{dy^2}k^2 + \frac{d^2F}{dz^2}l^2 + 2\frac{d^2F}{dydz}kl + 2\frac{d^2F}{dzdx}lh + 2\frac{d^2F}{dxdy}hk\right] + R_1.$$

Représentons le polynôme par

$$Ah^2 + A'k^2 + A''l^2 + 2Bkl + 2B'lh + 2B''hk$$
$$= h^2[A + A'\lambda^2 + A''\mu^2 + 2B\lambda\mu + 2B'\mu + 2B''\lambda].$$

Pour le *maximum*, le nouveau polynôme doit être *négatif* quels que soient λ et μ. Soit

$$P = A'\lambda^2 + 2(B\mu + B'')\lambda + A''\mu^2 + 2B'\mu + A.$$

On doit avoir

$$A' < 0, \quad (B\mu + B'')^2 - A'(A''\mu^2 + 2B'\mu + A) < 0.$$

La seconde inégalité équivaut à

$$(B^2 - A'A'')\mu^2 + 2(BB'' - A'B')\mu + B''^2 - AA' < 0.$$

Celle-ci, qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de μ, se décompose en

$$B^2 - A'A'' < 0, \quad (BB'' - A'B')^2 - (B^2 - A'A'')(B''^2 - AA') < 0.$$

Enfin, si l'on développe cette dernière inégalité, et que l'on ait égard à la condition $A' < 0$, on trouve

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' > 0.$$

Ainsi, les *conditions suffisantes* pour qu'il y ait maximum sont :

$$\left.\begin{array}{c} A' < 0, \quad B^2 - A'A'' < 0, \\ AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' > 0. \end{array}\right\} \quad (13)$$

158. *Remarque.* — Elles conduisent à celles-ci :

$$A'' < 0, \quad A < 0, \quad B'^2 - A''A < 0, \quad B''^2 - AA' < 0;$$

que l'on pourrait trouver directement.

Applications.

159. I. *Trouver le maximum et le minimum de*

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

en supposant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c.$$

Éliminant z^2, on a

$$u^2 = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) x^2 + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) y^2 + c^2;$$

puis

$$x = 0, \quad y = 0, \quad u = + c.$$

Cette valeur du *rayon vecteur* est un *minimum*. En effet, si l'on prend les dérivées secondes, on trouve

$$u \frac{d^2u}{dx^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}, \quad u \frac{d^2u}{dxdy} = 0, \quad u \frac{d^2u}{dy^2} = 1 - \frac{c^2}{b^2};$$

donc

$$\frac{d^2u}{dx^2} > 0, \quad \frac{d^2u}{dy^2} > 0, \quad \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} < 0.$$

160. Si l'on avait éliminé x^2, on aurait trouvé, de la même manière,

$$y = 0, \quad z = 0, \quad u = + a;$$

et cette valeur de u est un *maximum*. Enfin l'élimination de y^2 conduit à

$$x = 0, \quad z = 0, \quad u = + b:$$

cette valeur de u *n'est ni un maximum ni un minimum.* Elle donne, en effet :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right), \quad \frac{d^2u}{dxdz} = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right).$$

Ainsi

$$\frac{d^2u}{dx^2} > 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2} < 0;$$

etc.

161. *Remarque.* — Dans cet exemple très-simple, il a fallu, pour ne laisser échapper aucune solution, mettre la valeur de u^2 sous trois formes différentes. Cette circon-

stance paraît se rattacher à celle qui a été signalée dans le cas des fonctions d'une seule variable (150) : quand on écrit

$$u^2 = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) x^2 + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) y^2 + c^2,$$

on ne trouve pas le maximum a, parce que x ne peut surpasser a.

162. II. *Perpendiculaire abaissée de l'origine sur un plan.* — Les équations du problème sont (*)

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha + 2zx\cos\beta + 2xy\cos\gamma,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Le minimum de u est déterminé par les équations différentielles :

$$(x + z\cos\beta + y\cos\gamma)\,dx + (y + x\cos\gamma + z\cos\alpha)\,dy$$
$$+ (z + y\cos\alpha + x\cos\beta)\,dz = 0,$$

$$\frac{1}{a}dx + \frac{1}{b}dy + \frac{1}{c}dz = 0.$$

Si l'on emploie la *méthode du multiplicateur* (152), on peut choisir λ de manière à rendre nul le coefficient de dx; après quoi, dy et dz étant des accroissements arbitraires, leurs coefficients doivent être séparément nuls. On a donc

$$\frac{\lambda}{a} + x + z\cos\beta + y\cos\gamma = 0, \quad \frac{\lambda}{b} + y + x\cos\gamma + z\cos\alpha = 0,$$

$$\frac{\lambda}{c} + z + y\cos\alpha + x\cos\beta = 0.$$

L'élimination de λ conduit aux équations de la perpendiculaire :

(*) *Manuel des Candidats*, t. II, p. 31.

$$\frac{x+z\cos\beta+y\cos\gamma}{\frac{1}{a}}=\frac{y+x\cos\gamma+z\cos\alpha}{\frac{1}{b}}=\frac{z+y\cos\alpha+x\cos\beta}{\frac{1}{c}}.$$

De plus, chacun de ces rapports égale u^2.

163. *Remarque.* — Le problème revient à *déterminer, parmi tous les points d'un plan, celui dont la distance à l'origine est la plus petite possible :* c'est une question de *minimum relatif.* Or, si l'on cherche le *minimum absolu* de

$$v=u^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right),$$

u^2 étant la même fonction que ci-dessus, on retombe sur les équations précédentes. Par conséquent, *la méthode des multiplicateurs revient à substituer un problème de minimum absolu à un problème de minimum relatif.*

164. III. *Mener un plan tangent à un ellipsoïde donné, de manière que le triangle formé par les intersections de ce plan, avec les plans principaux, ait une aire minimum.*

L'équation de l'ellipsoïde étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{14}$$

si l'on appelle φ l'aire du triangle déterminé par le plan tangent au point (x, y, z), et que l'on fasse

$$\frac{x^2}{a^2}=u,\quad \frac{y^2}{b^2}=v,\quad \frac{z^2}{c^2}=w, \tag{15}$$

l'équation (14) devient

$$u+v+w=1; \tag{16}$$

et l'on trouve aisément

$$\frac{4\varphi^2}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{uvw}\left(\frac{u}{a^2}+\frac{v}{b^2}+\frac{w}{c^2}\right). \tag{17}$$

La condition $d\varphi = 0$ conduit à

$$\sum\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{u}\left(\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2}\right)\right] du = 0, \tag{18}$$

ou

$$\sum\left(\frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2}\right)\frac{du}{u} = 0.$$

De plus,

$$du + dv + dw = 0.$$

Retranchant, membre à membre, les dernières équations, après avoir divisé par λ tous les termes de la seconde, on trouve

$$\left(\frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2}\right)\frac{1}{u} - \frac{1}{\lambda} = 0, \quad \left(\frac{w}{c^2} + \frac{u}{a^2}\right)\frac{1}{v} - \frac{1}{\lambda} = 0,$$

$$\left(\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2}\right)\frac{1}{w} - \frac{1}{\lambda} = 0;$$

ou

$$\frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2} - \frac{u}{\lambda} = 0, \quad \frac{w}{c^2} + \frac{u}{a^2} - \frac{v}{\lambda} = 0, \quad \frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} - \frac{w}{\lambda} = 0. \tag{19}$$

L'élimination de w donne

$$v\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{\lambda}\right) = u\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{\lambda}\right);$$

puis, à cause de la symétrie, et par les propriétés des proportions :

$$\frac{u}{\left(\frac{a^2}{a^2+\lambda}\right)} = \frac{v}{\left(\frac{b^2}{b^2+\lambda}\right)} = \frac{w}{\left(\frac{c^2}{c^2+\lambda}\right)} = \frac{1}{\frac{a^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2}{b^2+\lambda} + \frac{c^2}{c^2+\lambda}}$$

$$= \frac{\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2}}{\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}}. \tag{20}$$

On conclut encore, des équations (19),

$$2\left(\frac{u}{a^2}+\frac{v}{b^2}+\frac{w}{c^2}\right)=\frac{1}{\lambda}.$$

Donc

$$\frac{2}{\dfrac{a^2}{a^2+\lambda}+\dfrac{b^2}{b^2+\lambda}+\dfrac{c^2}{c^2+\lambda}}=\frac{1}{\dfrac{\lambda}{a^2+\lambda}+\dfrac{\lambda}{b^2+\lambda}+\dfrac{\lambda}{c^2+\lambda}}=\frac{3}{3}=1.$$

On a ainsi, pour déterminer λ, l'une ou l'autre des équations

$$\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}=\frac{1}{\lambda}, \qquad (21)$$

$$\frac{a^2}{a^2+\lambda}+\frac{b^2}{b^2+\lambda}+\frac{c^2}{c^2+\lambda}=2. \qquad (22)$$

Celle-ci, développée, devient

$$2\lambda^3+(a^2+b^2+c^2)\lambda^2-a^2b^2c^2=0. \qquad (23)$$

Les équations (20) et (21) donnent

$$u=\frac{1}{2}\frac{a^2}{a^2+\lambda},\quad v=\frac{1}{2}\frac{b^2}{b^2+\lambda},\quad w=\frac{1}{2}\frac{c^2}{c^2+\lambda};$$

puis, par les formules (15) :

$$x^2=\frac{1}{2}\frac{a^4}{a^2+\lambda},\quad y^2=\frac{1}{2}\frac{b^4}{b^2+\lambda},\quad z^2=\frac{1}{2}\frac{c^4}{c^2+\lambda}.$$

165. Soit d la distance du centre au plan tangent. On a, par une formule connue,

$$\frac{1}{d^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4},$$

ou

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right);$$

ou encore, d'après l'équation (21),

$$d^2 = 2\lambda.$$

166. *Remarques.* — I. Si l'on fait $\lambda = \frac{abc}{t}$, on a, au lieu de l'équation (23) :

$$t^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\,t - 2abc = 0;$$

et alors, d'après un problème contenu dans l'*Arithmétique universelle* de Newton, t *est le diamètre du demi-cercle auquel on peut inscrire trois cordes consécutives, égales à des droites données* a, b, c.

II. Au moyen de cette transformation,

$$d^2 = 2\,\frac{abc}{t},$$

et

$$\varphi = \frac{1}{t}\sqrt{(bc + at)(ca + bt)(ab + ct)}.$$

167. IV. *Déterminer les axes de la section faite dans un ellipsoïde, par un plan diamétral donné.* De

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{24}$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \tag{25}$$

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{26}$$

on déduit, puisque *u doit être maximum ou minimum :*

$$\frac{x}{a^2}\,dx + \frac{y}{b^2}\,dy + \frac{z}{c^2}\,dz = 0,$$

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0,$$

$$x dx + y dy + z dz = 0.$$

La méthode des multiplicateurs (**151**) donne ensuite

$$\frac{x}{a^2} = \lambda x + \mu\alpha, \quad \frac{y}{b^2} = \lambda y + \mu\beta, \quad \frac{z}{c^2} = \lambda z + \mu\gamma. \tag{27}$$

Si l'on combine, par addition, ces équations (21), après multiplication par x, y, z, et que l'on ait égard aux relations données, on trouve

$$\lambda = \frac{1}{u^2},$$

$$x = \frac{a^2 u^2 \mu \alpha}{u^2 - a^2}, \quad y = \frac{b^2 u^2 \mu \beta}{u^2 - b^2}, \quad z = \frac{c^2 u^2 \mu \gamma}{u^2 - c^2};$$

puis, en substituant dans les équations (24), (26) :

$$1 = u^4 \mu^2 \sum \frac{a^2 \alpha^2}{(u^2 - a)^2}, \quad 1 = u^2 \mu^2 \sum \frac{a^4 \alpha^2}{(u^2 - a^2)^2}.$$

Pour éliminer μ^2, il suffit de retrancher, membre à membre, les deux dernières égalités. On obtient ainsi

$$\frac{a^2 \alpha^2}{u^2 - a^2} + \frac{b^2 \beta^2}{u^2 - b^2} + \frac{c^2 \gamma^2}{u^2 - c^2} = 0,$$

équation *bicarrée :* les valeurs de u^2, qui y satisfont, représentant les carrés des demi-axes de la section (*).

Exercices.

I. Décomposer un nombre a en n parties positives $x, y, z, \ldots$, de manière que $\Sigma x^2 + \Sigma xy$ soit un minimum.

II. On donne $x^y = y^x$, et l'on demande le maximum ou le minimum de y.

III. Trouver un point tel, que la somme de ses distances, aux sommets d'un triangle donné, soit un minimum. Calculer ce minimum.

(*) Ce résultat, qui reçoit son application dans la théorie de la *surface des ondes*, est connu sous le nom de *Théorème de Sedley Taylor*. (NOUVELLES ANNALES, t. XX, p. 113.)

IV. Tracer une *anse de panier* ABA′, à trois centres C, D, C′, de manière que le rapport des rayons BD, AC, soit minimum (on donne $OA = OA' = a$, $OB = b$).

V. Parmi toutes les ellipses inscrites à un rectangle donné, laquelle est la plus grande en surface? Laquelle est la plus petite?

VI. A une ellipse donnée, mener une tangente telle, que le segment de cette droite, compris entre les axes, soit minimum.

VII. Au moyen des relations

$$u = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x + y + z = a, \quad yz + zx + xy = b^2,$$

déterminer le maximum ou le minimum de u.

VIII. Trouver le maximum de $u = x^m y^n z^p$, en supposant $x + y + z = a$.

IX. Sachant que $x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 = 0$, trouver le maximum de $\frac{dy}{dx}$.

X. Trouver le maximum de

$$y = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2)\ldots(x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}.$$

XI. Théorème. — *De toutes les ellipses circonscrites à un même triangle, la plus petite a pour centre le centre de gravité du triangle.* (Euler.)

XII. Théorème. — *De toutes les pyramides ayant même angle polyèdre au sommet et même hauteur, la plus petite en volume a, pour centre de gravité de la base, le pied de la hauteur* (*).

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 35.

IV.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE XII.

DISCUSSION DES COURBES PLANES (*).

Équations de la tangente et de la normale.

168. *Tangente.* — Si

$$y = f(x) \tag{1}$$

représente une courbe plane, rapportée à des axes rectangulaires ou obliques, la tangente au point (x, y) a pour coefficient angulaire $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ (pp. 115 et 353).

L'équation de cette droite est donc

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x). \tag{2}$$

169. Plus généralement, la courbe étant définie par

$$F(x, y) = 0, \tag{3}$$

(*) Les notions relatives à la *tangente*, à la *normale*, au sens de la *convexité*, etc., que nous réunissons dans ce chapitre, complètent la *Théorie de la discussion des courbes planes*, donnée dans les éléments (voir, par exemple, *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. II, pp. 331, 375, 490).

on a (24)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}};$$

donc l'équation de la tangente devient

$$(Y - y)\frac{dF}{dy} + (X - x)\frac{dF}{dx} = 0,$$

ou

$$Y\frac{dF}{dy} + X\frac{dF}{dx} = y\frac{dF}{dy} + x\frac{dF}{dx}. \qquad (4)$$

170. *Remarque.* — Quand l'équation (3) est algébrique et de degré m, on peut, au moyen du *Théorème des fonctions homogènes* (100), remplacer le second membre de l'équation (4) par un polynôme dont le degré soit inférieur à m.

En effet, si l'on suppose

$$F(x, y) = U_m + U_{m-1} + \cdots + U_1 + U_0,$$

on a (102)

$$y\frac{dF}{dy} + x\frac{dF}{dx} = -U_{m-1} - 2U_{m-2} - \cdots - mU_0.$$

171. Exemple : L'équation de la tangente au *folium de Descartes*, représenté par $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, est

$$(y^2 - x)Y + (x^2 - y)X + xy = 0.$$

172. *Normale.* — Lorsque les axes sont *rectangulaires*, l'équation de la *normale* est

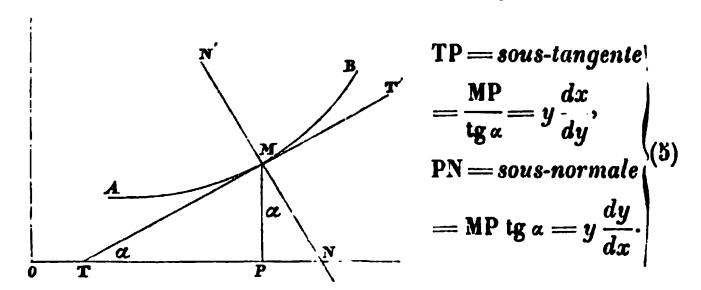
$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x),$$

ou plutôt

$$\frac{X - x}{\frac{dF}{dx}} = \frac{Y - y}{\frac{dF}{dy}}.$$

Sous-tangente, sous-normale.

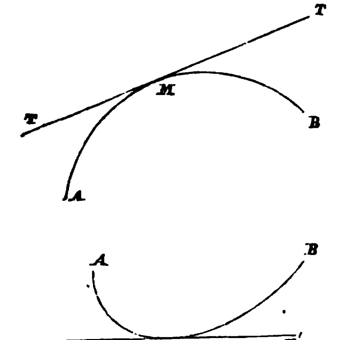
173. L'inspection de la figure prouve que :



$$\left.\begin{aligned} \mathrm{TP} &= \textit{sous-tangente} \\ &= \frac{\mathrm{MP}}{\operatorname{tg}\alpha} = y\frac{dx}{dy}, \\ \mathrm{PN} &= \textit{sous-normale} \\ &= \mathrm{MP}\operatorname{tg}\alpha = y\frac{dy}{dx}. \end{aligned}\right\} (5)$$

Sens de la convexité ou de la concavité.

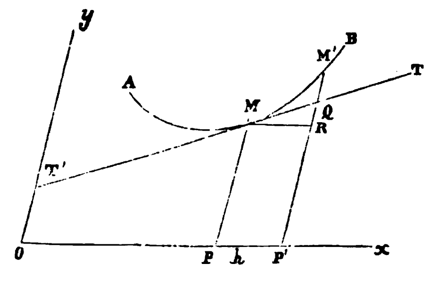
174. Quand un arc de courbe AMB est situé *au-dessous* de chacune de ses tangentes TT', il tourne sa *convexité* vers le haut de la figure, et sa *concavité* vers le bas. Le contraire a lieu quand l'arc est *au-dessus* de toutes ses tangentes (*).



175. On a vu, dans un cas particulier (ALG., **278**), qu'*un arc tourne sa convexité vers le haut ou vers le bas de la figure, selon que* f″(x) *est négative ou positive.* La même proposition subsiste en général.

(*) Si, par la pensée, on matérialise la courbe, de manière à lui donner une certaine *épaisseur*, la *convexité* est le *bord* qui regarde la tangente : c'est la partie *bombée*. La *concavité* est, conformément à l'étymologie, la partie *creuse* de la courbe.

Soient x et $y=f(x)$ les coordonnées du point M, commun à la courbe et à la tangente TT'.



La différence entre les ordonnées de deux points correspondants est

$$M'P' - QP' = f(x+h) - [f(x)+hf'(x)],$$

ou

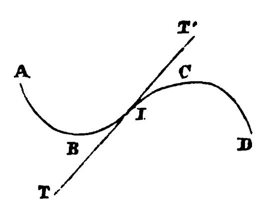
$$\frac{h^2}{1.2} f''(x+\theta h).$$

Si donc $f''(x)$ *est positive, on a, pour des valeurs de* h *suffisamment petites,* $f(x+h) > f(x) + hf'(x)$: *dans les environs du point de contact, la courbe est au-dessus de la tangente;* etc.

176. *Remarque.* — De $f''(x)>0$, on conclut (Alg., **162**) que $f'(x)$ *croît avec* x. Au contraire, si *la courbe est convexe vers le haut de la figure,* $f'(x)$ *décroît quand* x *augmente.*

Points d'inflexion.

177. Ces points sont ceux où *la concavité change de sens*: si l'arc ABI est convexe vers le bas de la figure, et que le contraire ait lieu pour l'arc ICD, I est un point d'inflexion.



La remarque précédente conduit à cette autre définition, que nous avons déjà donnée (Alg., **378**) :

les points d'inflexion d'une courbe sont ceux où le coefficient angulaire de la tangente devient maximum ou minimum.

178. *Remarque.* — D'après la première définition : *en un point d'inflexion* I, *la tangente* TT′ *traverse la courbe.*

179. *Détermination des points d'inflexion.* — Les valeurs de x qui rendent $f'(x)$ maximum ou minimum sont, *ordinairement,* racines de $f''(x)=0$ (**146**) : cette équation détermine donc, *ordinairement* aussi, les abscisses des points d'inflexion de la courbe.

180. *Remarques.* — I. Si une racine a, de $f''(x)=0$, annule $f'''(x)$, elle peut ne pas correspondre à un point d'inflexion. Par exemple, $y=x^4$ représente une courbe qui a l'aspect de la parabole ordinaire; et cependant $f''(x)=0$ donne $x=0$; mais ce nombre est racine de $f'''(x)=0$.

II. Plus généralement, si a annule $f'''(x)$, $f^{\text{v}}(x)$, ..., $f^n(x)$, sans annuler $f^{n+1}(x)$, *il n'y a pas inflexion quand* n *est impair;* il y a inflexion dans le cas contraire. La démonstration est toute semblable à celle que l'on a vue dans la théorie des maximums (**146**).

III. Quelquefois les points d'inflexion peuvent être déterminés par l'équation $f''(x)=\infty$: dans la *première parabole cubique,* représentée par $y=x^{\frac{1}{3}}$, l'origine est évidemment un point d'inflexion; et $y''=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ devient infinie pour $x=0$. Mais, si l'on change x en y et y en x, l'équation de la courbe devient $y=x^3$, et la règle ordinaire est applicable.

Différentielle de l'arc d'une courbe.

181. Représentons par s la longueur d'un arc quelconque AM, comptée à partir d'un point fixe ou *origine* A. Soient : x, y les coordonnées rectangulaires de M; $x+\Delta x$, $y+\Delta y$

les coordonnées d'un second point M' de la courbe AM, infiniment voisin de M; Δs, l'accroissement MM' de AM; c, la longueur de la corde MM'. On a

$$c^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2,$$

et (11)

$$c^2 = (\Delta s)^2 (1 - \varepsilon)^2;$$

donc

$$(\Delta s)^2 (1 - \varepsilon)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2;$$

puis, si l'on appelle t la variable indépendante,

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 (1 - \varepsilon)^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2.$$

La quantité ε s'annule en même temps que Δt (11) (*): à la limite, l'équation devient donc

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

ou

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{6}$$

quelle que soit la variable indépendante.

182. *Angles de la tangente avec les axes.* — En les désignant par α, β, on a, en vertu de la dernière relation et de la formule $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \sin \alpha = \frac{dy}{ds}. \tag{7}$$

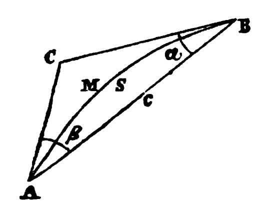
(*) On va voir, mais cela est indifférent pour la démonstration, que ε *est un infiniment petit du deuxième ordre.*

183. *Longueurs de la tangente et de la normale.* — Si l'on se reporte au n° **173**, on trouve

$$\left.\begin{aligned} \text{MT} &= \textit{tangente} = \frac{y}{\sin\alpha} = y\frac{ds}{dy}, \\ \text{MN} &= \textit{normale} = \frac{y}{\cos\alpha} = y\frac{ds}{dx}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

184. Théorème. — *La différence entre un arc infiniment petit et sa corde est une quantité du troisième ordre.*

L'arc AMB $= s$ étant supposé assez petit pour qu'il soit convexe, menons la corde AB $= c$ et les tangentes AC, BC. Soient α, β les angles ABC, BAC : ces angles sont infiniment petits, puisqu'ils s'annulent quand le point B, supposé mobile, vient coïncider avec le point fixe A. La longueur s est comprise entre c et AC $+$ BC; donc



$$s - c < \text{AC} + \text{BC} - c,$$

ou

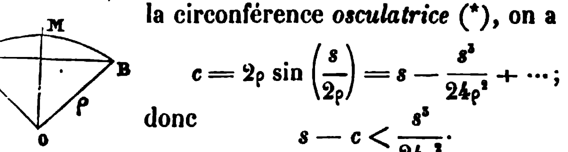
$$s - c < c\left[\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - 1\right];$$

ou encore, par une transformation simple,

$$s - c < \frac{c \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

Le dénominateur a pour limite 1; les trois facteurs du numérateur sont infiniment petits; donc, c étant pris pour infiniment petit *principal*, $s - c$ est du troisième ordre.

185. *Remarque.* — Si l'on remplace l'arc AMB $= s$ par la circonférence *osculatrice* (*), on a



$$c = 2\rho \sin\left(\frac{s}{2\rho}\right) = s - \frac{s^3}{24\rho^2} + \cdots;$$

donc

$$s - c < \frac{s^3}{24\rho^2}.$$

Exercices.

I. Discuter les courbes représentées par

$$y = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1 \ (^{**}), \quad y = x \sin\frac{1}{x},$$

$$y = x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\operatorname{tg} x \ (^{***}), \quad y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^3-1}{x}},$$

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^3+1}{x}}, \quad y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}},$$

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}}, \quad y^4 - x^4 - 96y^2 + 100x^2 = 0 \ (^{****}),$$

$$y^4 + x^4 - 96y^2 - 100x^2 = 0, \quad x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 = 0,$$

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = (a^4x^2 + b^4y^2)^2, \quad y^2 = x \pm \sqrt{x - x^2},$$

$$y^2 = x \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad y^2 = x \pm \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{x + d}};$$

et trouver, pour chacune, la valeur de ds^2.

II. Mêmes questions pour

$$y = x^n(1-x)^p, \quad x^{2n} + y^{2n} = 1.$$

Vers quelles limites tendent les deux dernières courbes, quand n augmente indéfiniment?

(*) Voir au Chap. XIV.

(**) Voir p. 303.

(***) Voir p. 433.

(****) *Courbe du diable.* Elle se compose de deux branches infinies et d'une sorte de *huit* dont la forme se rapproche de celle du jouet appelé *diable.* La discussion de cette courbe remarquable se trouve dans le grand Traité de Lacroix.

III. Déterminer les points d'inflexion des courbes dont les équations sont :

$$y = \sqrt[4]{\frac{1-x}{x}}, \quad x^3 + y^3 = a^3, \quad x^4 - a^2x^2 + a^3y = 0,$$

$$x + y - 2\sin(y - x - 1) = 0, \quad y = b + (x-a)^{\frac{m}{n}}.$$

$$y^2 = x \pm \sqrt{x^2 - 2x + 3} \ (*).$$

CHAPITRE XIII.

SUITE. — EMPLOI DES COORDONNÉES POLAIRES.

186. *Direction de la tangente.* — Soient u, ω les coordonnées du point M d'une courbe AB; et $u+k$, $\omega+h$ les coordonnées du point M'. En menant MP perpendiculaire à OM', on a, dans le triangle rectangle MPM' :

$$\operatorname{tg} M' = \frac{MP}{M'P} = \frac{u \sin h}{u + k - u\cos h}$$

$$= \frac{u \sin h}{k + \frac{1}{2} u \sin^2 \frac{1}{2} h};$$

(*) Dans ce dernier exemple, l'équation qui donne les abscisses des points d'inflexion est

$$x^3 - 12x^2 + 3 = 0.$$

On peut la résoudre *complètement* (*Nouvelle Correspondance mathématique*, tome II, pp. 221 et 363).

puis

$$\operatorname{tg} V = \lim \operatorname{tg} M' = \frac{u \lim \dfrac{\sin h}{h}}{\left[\lim \dfrac{k}{h} + \dfrac{1}{2} u \lim \dfrac{\sin^2 \frac{1}{2} h}{h}\right]} = \frac{u}{\lim \dfrac{k}{h}} = \frac{u}{u'};$$

ou encore

$$\operatorname{tg} V = u \frac{d\omega}{du}. \qquad (1)$$

187. *Remarque.* — On arrive plus rapidement à cette formule au moyen des infiniment petits. En négligeant les quantités du deuxième ordre, on peut regarder OP comme étant égal à OM; donc $\operatorname{tg} M' = \frac{u d\omega}{du}$. Mais l'angle M' diffère infiniment peu de M; donc, etc.

188. *Sous-tangente, sous-normale.* — Si l'on mène, par le pôle, la perpendiculaire TN au rayon vecteur, les segments de cette droite, déterminés par la tangente et par la normale, sont appelés *sous-tangente* et *sous-normale*. Donc

$$\text{OT} = \textit{sous-tangente} = \text{OM} \operatorname{tg} V = u^2 \frac{d\omega}{du}, \qquad (2)$$

$$\text{ON} = \textit{sous-normale} = \text{OM} \cot V = \frac{du}{d\omega} = u'. \qquad (3)$$

Cette dernière valeur doit être remarquée, à cause de sa simplicité (*).

189. *Différentielle de l'arc.* — Le triangle MPM' donne, immédiatement,

$$ds^2 = du^2 + u^2 d\omega^2, \qquad (4)$$

relation à laquelle on arrive aussi (**65**) en partant de

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad x = u \cos \omega, \quad y = u \sin \omega.$$

190. *Angle de la tangente avec l'axe polaire.* — L'angle α est extérieur au triangle OCM; donc

$$\alpha = \omega + V = \omega + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{u'}. \qquad (5)$$

(*) Il en résulte le théorème sur les conchoïdes (**90**).

191. *Points d'inflexion.* — Ce sont ceux pour lesquels α devient maximum ou minimum (**177**); donc ils sont déterminés par l'équation

$$0 = 1 + \frac{dV}{d\omega} = 1 + \frac{u'^2 - uu''}{u'^2 + u^2},$$

ou

$$u^2 + 2u'^2 - uu'' = 0. \tag{6}$$

192. *Remarque.* — Si l'équation de la courbe peut être mise sous la forme $u = \frac{1}{\varphi(\omega)}$, on a

$$u' = -\frac{\varphi'}{\varphi^2}, \quad \frac{u}{u'} = -\frac{\varphi}{\varphi'},$$

$$\alpha = \omega - \text{arc tg} \frac{\varphi}{\varphi'}; \tag{7}$$

puis, au lieu de l'équation (6),

$$0 = 1 - \frac{\varphi'^2 - \varphi\varphi''}{\varphi'^2 + \varphi^2},$$

ou enfin

$$\varphi + \varphi'' = 0. \tag{8}$$

193. *Application.* — Soit

$$u = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\cos 4\omega};$$

ce qui donne

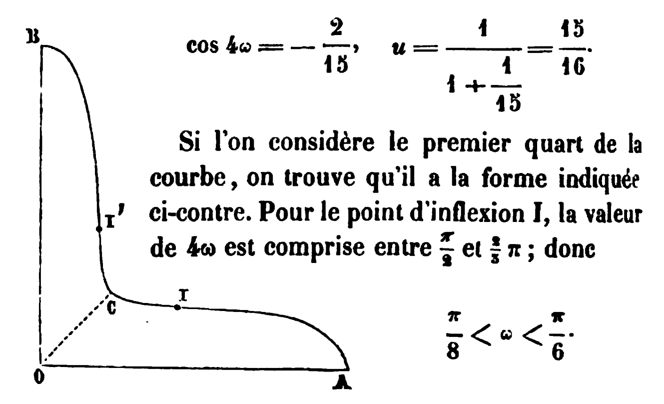
$$\varphi = 1 - \frac{1}{2}\cos 4\omega, \quad \varphi' = 2\sin 4\omega, \quad \varphi'' = 8\cos 4\omega.$$

L'équation (8) devient

$$1 + \frac{15}{2}\cos 4\omega = 0.$$

Les points d'inflexion sont donc déterminés par les formules

$$\cos 4\omega = -\frac{2}{15}, \quad u = \frac{1}{1+\frac{1}{15}} = \frac{15}{16}.$$



Si l'on considère le premier quart de la courbe, on trouve qu'il a la forme indiquée ci-contre. Pour le point d'inflexion I, la valeur de 4ω est comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2}{3}\pi$; donc

$$\frac{\pi}{8} < \omega < \frac{\pi}{6}.$$

La formule (7) peut être écrite ainsi :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \omega - \frac{\varphi}{\varphi'}}{1 + \frac{\varphi}{\varphi'} \operatorname{tg} \omega}.$$

Pour calculer cette valeur, remarquons d'abord que, d'après les inégalités précédentes,

$$\sin 4\omega = +\sqrt{1-\left(\frac{2}{15}\right)^2} = +\frac{1}{15}\sqrt{221}, \quad \cos 2\omega = +\sqrt{\frac{13}{30}},$$

$$\operatorname{tg} \omega = +\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{13}{30}}}{1+\sqrt{\frac{13}{30}}}} = +\frac{\sqrt{30}-\sqrt{13}}{\sqrt{17}},$$

$$\varphi = \frac{16}{15}, \quad \varphi' = \frac{2}{15}\sqrt{221};$$

puis

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{30}-\sqrt{13}}{\sqrt{17}} - \frac{8}{\sqrt{221}}}{1 + \frac{8(\sqrt{30}-\sqrt{13})}{17\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{390}-21}{8\sqrt{30}+9\sqrt{13}}\sqrt{17}.$$

Le numérateur est négatif; dont la tangente en I fait, avec OA, un angle obtus. Au moyen des tables trigonométriques, on trouve $\alpha = 178°47'$.

Exercices.

I. Trouver les points d'inflexion des courbes représentées par

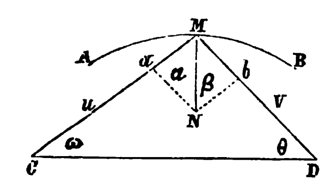
$$u = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}\cos\frac{8}{3}\omega}, \quad u = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}\cos 6\omega}, \quad u = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}\omega},$$

$$u^2 = \frac{a^2}{\omega}, \quad u = \frac{a}{\cos\omega} + b\,(^*), \quad u = a(\mathrm{tg}\,\omega - 1), \quad u^2 = a^2\frac{\sin 3\omega}{\cos\omega}.$$

II. Théorème. — *Une courbe* AMB *étant définie par l'équation*

$$F(u, v) = 0$$

entre les coordonnées bipolaires u, v; *si l'on prend les distances* Ma, Mb, *proportionnelles à* $\frac{dF}{du}$, $\frac{dF}{dv}$, *et que l'on achève le parallélogramme* MaNb, *la diagonale* MN *est normale, en* M, *à la courbe.*



III. Appliquer cette construction à l'*ovale de Descartes*, représentée par

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = c\,(^{**}).$$

IV. Exprimer ds^2 en fonction de u, v et de leurs différentielles.

V. Que deviennent les formules demandées, si les coordonnées u, v sont remplacées par ω, θ?

(*) *Conchoïde*. Voir p. 350.

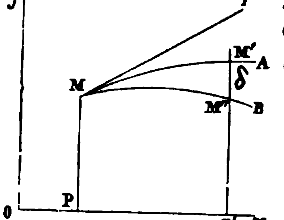
(**) Voir p. 448.

CHAPITRE XIV.

CONTACT, OSCULATION ET COURBURE DES LIGNES PLANES.

Contact et osculation.

194. *Divers ordres de contacts.* — Soient $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ les équations de deux courbes MA, MB ayant un point commun M. Il en résulte



$$M'M'' = \delta = f(x+h) - \varphi(x+h)$$
$$= h\left[f'(x) - \varphi'(x) + \varepsilon\right],$$

ε désignant, suivant l'usage, un infiniment petit, de même ordre que h.

Si MA, MB ont une tangente commune MT, $f'(x) = \varphi'(x)$; donc

$$\delta = \frac{h^2}{1.2}\left[f''(x) - \varphi''(x) + \varepsilon_1\right],$$

ε_1 s'annulant avec h : on dit que les deux courbes ont un *contact du premier ordre.*

Si, axec $f'(x) = \varphi'(x)$, on a $f''(x) = \varphi''(x)$, la différence des ordonnés M'P', M''P' devient

$$\delta = \frac{h^3}{1.2.3}\left[f'''(x) - \varphi'''(x) + \varepsilon_2\right] :$$

il y a *contact du deuxième ordre;* et ainsi de suite.

195. *Remarque.* — Quand le contact est de premier ordre, δ ne change pas de signe avec h : *près du point de*

contact, l'une des courbes est intérieure à l'autre. Au contraire, le contact étant du deuxième ordre, δ change de signe en même temps que h : *les deux courbes sont sécantes.* Cette propriété est générale : *suivant que l'ordre du contact est pair ou impair, les deux lignes sont tangentes et sécantes, ou simplement tangentes.*

196. Si les courbes MA, MB ont un contact d'ordre n, et qu'une courbe MC ait, avec MA, un contact de l'ordre $n-1$ seulement, le rapport des valeurs correspondantes de δ a pour limite zéro. Par conséquent : *dans les environs du point* M, *la courbe* MB *s'approche de* MA *plus que toute autre courbe* MC *ayant, avec* MA, *un contact d'ordre inférieur à* n.

197. *Courbes osculatrices.* — Quand on dispose des *paramètres* contenus dans $\varphi(x)$, de manière que l'ordre du contact entre MB et MA soit aussi élevé que possible, la courbe MB est dite *osculatrice* à MA. Ordinairement, l'*ordre du contact* de MB avec MA *est égal au nombre des paramètres, diminué de l'unité* : en effet, il faut $n+1$ équations pour exprimer qu'il y a contact d'ordre n. Par exemple, comme l'équation $y = ax + b$ renferme seulement deux paramètres, *la droite osculatrice* à une courbe *est,* simplement, *la tangente à cette courbe.*

Cercle osculateur.

198. Supposons que la courbe osculatrice soit la circonférence représentée par

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2. \qquad (1)$$

Cette équation contient trois paramètres; donc *le cercle osculateur est celui qui a un contact du deuxième ordre avec la courbe.* Pour déterminer α, β, ρ, il suffit d'exprimer que

x, y, y' et y'' ont mêmes valeurs pour la courbe donnée et pour le cercle cherché. D'après l'équation (1) :

$$x - \alpha + (y - \beta) y' = 0, \tag{2}$$

$$1 + y'^2 + (y - \beta) y'' = 0. \tag{3}$$

Ainsi, dans chaque cas particulier, l'on devra remplacer y', y'' par $f'(x)$, $f''(x)$.

On tire, des relations (2), (3) :

$$y - \beta = -\frac{1 + y'^2}{y''}, \tag{4}$$

$$x - \alpha = \frac{(1 + y'^2) y'}{y''}, \tag{5}$$

$$\rho = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}; \tag{6}$$

puis, en désignant par θ l'angle de la tangente avec la partie positive de l'axe des abscisses :

$$y - \beta = \mp \rho \cos \theta, \quad x - \alpha = \pm \rho \sin \theta;$$

ou bien :

$$\beta = y \pm \rho \cos \theta, \quad \alpha = x \mp \rho \sin \theta. \tag{7}$$

Conséquemment, en partant de l'équation d'une courbe, on peut déterminer le centre et le rayon du cercle osculateur à cette courbe.

190. *Remarques.* — I. Le rayon ρ est souvent regardé comme essentiellement positif : on doit donc attribuer à $\sqrt{(1 + y'^2)^3}$ le signe de y''. Néanmoins, si l'on veut que la formule (6) donne la grandeur du rayon et le sens dans lequel il est dirigé, on peut convenir de prendre *positivement* le radical; et alors ρ est situé *au-dessus* ou *au-dessous* de la courbe, selon que celle-ci tourne sa convexité ou sa concavité vers le bas de la figure (**175**).

II. Aux points d'inflexion, le cercle osculateur est remplacé par la tangente. En effet, le rayon ρ devient infini lorsque $y''=0$; et cette condition détermine les points dont il s'agit.

200. *Expressions diverses de* ρ. — A l'occasion des *Changements de variables,* nous avons trouvé

$$\rho = \pm \frac{ds^3}{dx d^2y - dy d^2x}, \tag{8}$$

$$\rho = \pm \frac{(u^2 + u'^2)^{\frac{3}{2}}}{u^2 + 2u'^2 - uu''}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2, \tag{10}$$

suivant que la variable indépendante est quelconque, ou qu'elles est ω, ou qu'elle est s.

A ces formules, on peut ajouter celle-ci :

$$\rho = \pm \frac{(\varphi^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^3(\varphi + \varphi'')}, \tag{11}$$

que l'on déduit aisément de la deuxième, en supposant (**192**)

$$u = \frac{1}{\varphi} \text{ (*)};$$

puis les deux suivantes, dont la vérification est facile :

$$\rho = \pm \frac{dx}{d\left(\frac{dy}{ds}\right)} = \mp \frac{dy}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)} \text{ (**)}.$$

(*) Si, pour l'homogénéité, on écrit $u = \frac{a^2}{\varphi}$, cette égalité constitue la *transformation par rayons vecteurs réciproques.*

(**) Elles m'ont été indiquées par M. Mansion, professeur à l'Université de Gand.

Application aux coniques.

201. Considérons d'abord l'ellipse représentée par

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

On tire de cette équation, en prenant x comme variable indépendante :

$$a^2yy' + b^2x = 0, \quad a^2y'^2 + a^2yy'' + b^2 = 0;$$

puis

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad y'' = -\frac{\frac{b^4x^2}{a^2y^2} + b^2}{a^2y} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

La formule (7) devient donc

$$\rho = \pm\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}. \qquad (12)$$

Telle est la valeur générale du *rayon du cercle osculateur à l'ellipse.*

202. Si l'on élimine y^2, on trouve

$$\rho^2 = \frac{[a^4 - (a^2 - b^2)x^2]}{a^8b^2};$$

et il est visible que ρ^2 est *minimum pour* $x = \pm a$, *maximum pour* $x = 0$; c'est-à-dire aux extrémités du grand axe et aux extrémités du petit axe. Pour les premiers points,

$$\rho_1 = minimum = \frac{b^2}{a};$$

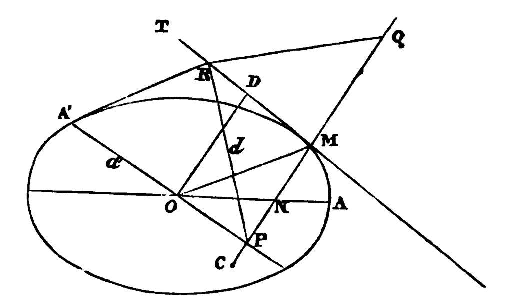
et, pour le second,

$$\rho_2 = maximum = \frac{a^2}{b}.$$

De ces deux formules, on conclut que :

Le rayon du cercle osculateur, en un sommet de l'ellipse

est une troisième proportionnelle au demi-axe aboutissant à ce sommet, et à l'autre demi-axe.



202. *Transformations de la formule.* — 1° Si l'on appelle d la distance OD du centre à la tangente MT, on a, par une propriété connue,

$$\frac{1}{d^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4b^4}.$$

Au moyen de cette valeur, on peut écrire ainsi l'égalité (12) :

$$\rho=\frac{a^2b^2}{d^3}.$$

2° Soit a' le demi-diamètre parallèle à MT : le premier *Théorème d'Apollonius* consiste en ce que $da'=ab$ (*); donc la dernière formule se réduit à

$$\rho=\frac{a'^2}{d}. \qquad (13)$$

Celle-ci exprime ce théorème, généralisation du précédent: *Le rayon du cercle osculateur, en un point quelconque* M *de l'ellipse, est une troisième proportionnelle à la distance de ce point au diamètre conjugué de* M, *et à la moitié de ce diamètre conjugué.*

(*) *Manuel des Candidats*, t. I, p. 429.

3° Si l'on désigne par u, v les *rayons vecteurs* aboutissant au point M, on a (*)

$$uv = \left(a + \frac{c}{a}x\right)\left(a - \frac{c}{a}x\right) = a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2y^2}{a^2}.$$

Mais

$$a^2x^2 = \frac{a^4}{b^2}(b^2 - y^2);$$

donc

$$uv = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{d^2} = \rho d;$$

ou bien

$$\rho = \frac{uv}{d} (^{**}). \qquad (14)$$

204. *Construction géométrique.* — Menons la tangente A'R; joignons le point R, où elle coupe la tangente MT, au *pied* P de la normale MN; et élevons RQ perpendiculaire à PR. D'après la formule (13), MQ $=\rho$. Conséquemment, *le point* C, *symétrique de* Q *par rapport à* M, *est le centre du cercle osculateur.*

205. *Autre construction.* — En désignant par n la longueur de la normale MN, on a (**182**)

$$n = y\sqrt{1 + y'^2};$$

(*) *Manuel des Candidats*, t. I, p. 414.

(**) Comme $\frac{a^2b^2}{d^2} = a'^2$, on a

$$a' = \sqrt{uv}.$$

Ainsi, *le demi-diamètre, perpendiculaire à la normale, est moyen proportionnel entre les deux rayons vecteurs.*

De cette remarque, on déduit aisément la *construction des axes, au moyen d'un système de diamètres conjugués*, construction donnée par M. Chasles, il y a longtemps.

donc la formule (6) devient, à cause de $y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}$:

$$\rho = \frac{n^3}{\left(\frac{b^4}{a^2}\right)};$$

ou, si l'on appelle p le *demi-paramètre,* égal à $\frac{b^2}{a}$:

$$\rho = \frac{n^3}{p^2}. \tag{15}$$

Ainsi, *dans l'ellipse, le rayon du cercle osculateur est égal au cube de la normale, divisé par le carré du demi-paramètre* (*). On peut donc construire ρ au moyen d'une troisième proportionnelle et d'une quatrième proportionnelle.

206. *Coordonnées polaires.* — Soit l'équation

$$u = \frac{p}{1 - e\cos\omega}, \tag{16}$$

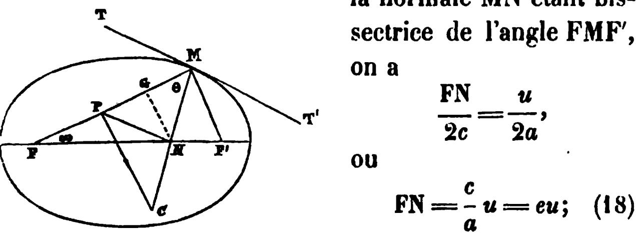
qui appartient à toutes les coniques. On en conclut :

$$\varphi = \frac{1 - e\cos\omega}{p}, \quad \varphi' = \frac{e\sin\omega}{p}, \quad \varphi'' = \frac{e\cos\omega}{p};$$

puis, par la formule (10),

$$\rho = \frac{u^3}{p^2}(1 - 2e\cos\omega + e^2)^{\frac{3}{2}}. \tag{17}$$

Pour simplifier cette expression, on peut observer que, la normale MN étant bissectrice de l'angle FMF′, on a



$$\frac{FN}{2c} = \frac{u}{2a},$$

ou

$$FN = \frac{c}{a}u = eu; \tag{18}$$

(*) On va voir que ce théorème subsiste pour toutes les coniques.

3° Si l'on désigne par u.

sant au point M, on a (*... $e \cos \omega + e^2$).

$uv = \left(a + \frac{c}{a}x\right)\left(a \cdot\right.$ ... la formule (16) en

Mais $\rho = \frac{n^3}{p^2}$;

donc ... transformation. — Si l'on désigne par G ... que l'on abaisse NG perpendiculaire à MF.

ou b ... $\cos\theta\, u$ — FN $\cos\omega = u\,(1 - e\cos\omega)$;

... par l'équation (16) :

$$n \cos\theta = p \text{ (*)}. \qquad (19)$$

On a donc finalement, au lieu de la formule (14),

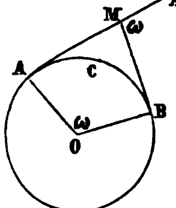
$$\rho = \frac{n}{\cos^2\theta}. \qquad (20)$$

208. *Construction géométrique.* — Celle qui résulte de la dernière expression est fort simple : il suffit, pour trouver le centre C du cercle osculateur, d'*élever* NP *perpendiculaire à la normale* MN, *puis* PC *perpendiculaire au rayon vecteur* FM.

(*) La relation (19) exprime que, *dans toute conique, la projection de la normale, sur le rayon vecteur mené d'un foyer, est égale au demi-paramètre.* Ce théorème est dû à Étienne Pagès, prématurément enlevé aux sciences.

la courbure des lignes.

sens vulgaire du mot *courbe*, on est con- . 1° *une circonférence a même* COURBURE *en* .s; 2° *de deux circonférences, celle qui a le plus* *a la plus grande courbure*. En conséquence, on prend, pour *mesure de la courbure* d'une circonférence dont le rayon est R, $\frac{1}{R}$.



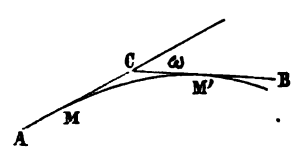
D'ailleurs,

$$\frac{1}{R}=\frac{\omega}{ACB};$$

car

$$ACB = R\omega.$$

210. *Rayon de courbure.* — Considérons, sur une ligne quelconque AB, un petit arc convexe MM', dont les tangentes fassent entre elles l'angle ω : $\frac{\omega}{MM'}$ est ce qu'on appelle la *courbure moyenne* de l'arc MM'. Si M' se rapproche de M, $\frac{\omega}{MM'}$ tend vers une limite que l'on peut représenter par $\frac{1}{R}$: R est le *rayon de courbure*, relatif au point M.



211. *Identité du cercle de courbure et du cercle osculateur.* — Si l'on désigne par ε l'angle de deux tangentes consécutives, ε est l'*angle de contingence*. On vient de voir que $\frac{1}{R}=\lim\frac{\omega}{MM'}$. Or, cette limite égale $\frac{\varepsilon}{ds}$; donc $\frac{1}{R}=\frac{\varepsilon}{ds}$.

Cela posé, il est visible que

$$\pm\varepsilon = d.\left(\text{arc tg}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{ds^2};$$

donc

$$R=\pm\frac{ds^3}{dxd^2y-dyd^2x}=\rho.$$

Exercices.

I. L'équation de l'ellipse, en coordonnées bipolaires, étant $u + v = 2a$; trouver l'expression du rayon de courbure, v étant la variable indépendante.

II. Calculer les rayons de courbure des lignes représentées par

$$y^2 = 2px + qx^2, \quad y^2 = \frac{x^3}{3a} \text{(I)}, \quad y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \text{(II)},$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \text{(III)}, \quad \frac{y}{a} = \mathrm{l}\frac{x}{a} \text{(IV)}, \quad u^2 = a^2 \cos 2\omega \text{(V)},$$

$$u = a\omega \text{(VI)}, \quad u = \frac{a}{\omega} \text{(VII)}, \quad u = ae^{\omega} \text{(VIII)}, \quad y = \sin x.$$

III. L'ellipse étant rapportée à la tangente et à la normale en un point M, calculer le rayon de courbure en ce point.

IV. Les données étant les mêmes que dans la question précédente, déterminer la parabole osculatrice à l'ellipse.

V. THÉORÈME. — *Le rayon de courbure de la* chaînette, *représentée par*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

est égal au segment de la normale, compris entre la courbe et l'axe des abscisses.

(I) *Seconde parabole cubique.*
(II) *Cissoïde.*
(III) *Hypocycloïde à quatre rebroussements.*
(IV) *Logarithmique.*
(V) *Lemniscate de Bernoulli.*
(VI) *Spirale d'Archimède.*
(VII) *Spirale hyperbolique.*
(VIII) *Spirale logarithmique.*

VI. Théorème. — *La distance d'un point* M *d'une courbe, à la tangente au point* M' *infiniment voisin de* M, *est*

$$\delta = \frac{ds^2}{2\rho}.$$

VII. Théorème. — *Le lieu des foyers des paraboles qui ont, en un point donné, un contact du second ordre avec une courbe donnée, est un cercle.*

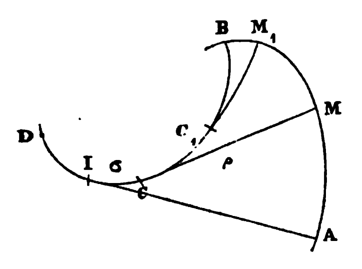
VIII. Théorème. — *Soient* u, ω *les coordonnées d'un point* M *appartenant à une courbe* C. *Soient* u', ω' *les coordonnées du point* M' *de la* podaire C' *de* C, *correspondant à* M. *Soient enfin* ρ, ρ' *les rayons de courbure de* C, C', *en* M, M' : *on a*

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{2}{u} - \frac{\rho u'}{u^3}.$$

CHAPITRE XV.

DÉVELOPPÉES ET DÉVELOPPANTES.

212. La *développée* CD d'une courbe AB est le lieu des centres C des cercles osculateurs à AB. Réciproquement, AB est la *développante* de CD.



213. Théorème I. — *La normale* MC, *à la développante, est tangente à la développée.*

Reprenons (**198**) les équations qui déterminent le centre C et le rayon ρ :

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2, \quad (1)$$
$$(x-\alpha) + (y-\beta)\,y' = 0, \quad (2)$$
$$1 + y'^2 + (y-\beta)\,y'' = 0. \quad (3)$$

Si l'on différencie l'équation (2), en y regardant y, y', α, β comme des fonctions de x (*), on trouve, eu égard à l'équation (3) :

$$\frac{d\alpha}{dx} + y'\frac{d\beta}{dx} = 0,$$

ou

$$\frac{d\beta}{d\alpha}y' + 1 = 0;$$

et cette relation exprime que les tangentes en M et en C sont perpendiculaires l'une à l'autre.

214. Théorème II. — *L'arc σ de développée, compté à partir d'une origine fixe* I, *augmenté du rayon ρ de la développante, tangent à la seconde extrémité de l'arc σ, donne une somme constante.*

La considération de la tangente CM à la développée conduit, immédiatement, aux égalités

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{x-\alpha}{\rho}, \quad \frac{d\beta}{d\sigma} = \frac{y-\beta}{\rho};$$

d'où l'on conclut, par les propriétés des proportions :

$$\frac{d\alpha}{x-\alpha} = \frac{d\beta}{y-\beta} = \frac{d\sigma}{\rho} = \frac{(x-\alpha)\,d\alpha + (y-\beta)\,d\beta}{\rho d\rho}.$$

(*) Au n° cité, on a différencié l'équation (1), puis l'équation (2), en supposant α, β, ρ *constants* : il s'agissait d'une même circonférence. Maintenant, au contraire, la circonférence C varie avec le point M.

Mais, si l'on différencie *complètement* l'équation (1), en ayant égard à l'équation (2), mise sous la forme

$$(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy=0,$$

on trouve

$$-(x-\alpha)\,d\alpha-(y-\beta)\,d\beta=\rho d\rho.$$

Par suite,

$$d\sigma=-d\rho;$$

et, en conséquence,

$$\sigma+\rho=const=\text{IA}.$$

215. Le dernier théorème explique la dénomination de *développée*, donnée à la courbe IB : si l'on fixe, en I, l'une des extrémités d'un fil IA, puis que l'on enroule ce fil sur la courbe, de manière qu'il soit constamment tendu, l'extrémité libre décrira la développante AMB.

En effet, à cause de $\sigma+\rho=\text{IA}$, quand la partie du fil, appliquée sur la développée, sera IC, la partie *tangentielle* sera CM.

216. *Remarques.* — I. B étant le point commun aux deux courbes, *arc* ICB $=$ IA.

II. A une développée DCB correspondent une infinité de développantes, simultanément décrites par tous les points du fil, à mesure qu'ils se séparent de la développée. Toutes ces développantes sont des courbes *parallèles et équidistantes* (**18**) deux à deux.

III. *Toutes les développantes d'un cercle sont des courbes égales.*

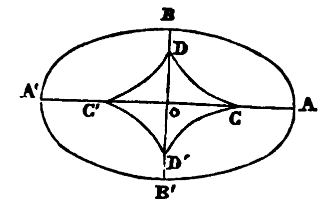
Développée de l'ellipse.

217. De l'équation $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, on tire (**201**) :

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad y''=-\frac{b^4}{a^2y^3};$$

puis
$$y-\beta=\frac{1+y'^2}{y''}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)\,y}{a^2b^4};$$
donc
$$\beta=\left[1-\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^2b^4}\right]y=-\frac{c^2y^3}{b^4}.$$
De même,
$$\alpha=\frac{c^2x^3}{a^4}.$$
Par suite,
$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}. \qquad (5)$$
Telle est l'équation de la développée de l'ellipse.

Cette courbe a la forme CDC'D', c'est-à-dire qu'elle présente quatre points de *rebroussement*.



218. *Remarque.* — D'après le Théorème II,
$$D'C+CA=D'B,$$
ou
$$D'C=D'B-CA.$$
Or (**202**) :
$$CA=\rho_1=\frac{b^2}{a}, \quad D'B=\rho_2=\frac{a^2}{b};$$
donc
$$\text{arc } D'C=\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}.$$

Ainsi, *la développée de l'ellipse est rectifiable, tandis que l'ellipse ne l'est pas.*

219. *Parallèles à l'ellipse.* — L'équation générale des courbes qui ont CD'C'C pour développée est (*)
$$(AB-9C)^2=4\,(A^2+3B)\,(B^2+3AC);$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. III, p. 553; *Mélanges mathématiques*, p. 55.

où l'on a fait, pour abréger :

$$\begin{aligned} A &= x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2, \\ B &= a^2y^2 + b^2x^2 - a^2k^2 - b^2k^2 - a^2b^2, \\ C &= a^2b^2k^2. \end{aligned}$$

Ces courbes sont appelées *toroïdes,* parce qu'on peut les obtenir en projetant un *tore* sur un plan.

Exercices.

I. Trouver les développées des lignes représentées par

$$y^2 = 2px + qx^2,\quad y^2 = \frac{x^3}{3a},\quad y^2 = \frac{x^3}{2a - x},\quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{y}{a} = l\frac{x}{a},\quad y = \sin x,\quad u^2 = a^2\cos 2\omega,\quad u = a\omega,\quad u = \frac{a}{\omega},\quad u = ae^{\omega}.$$

II. Théorème. — *La spirale logarithmique est égale à sa développée.*

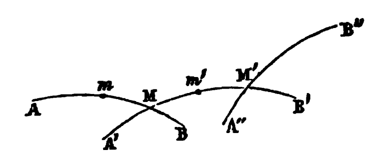
CHAPITRE XVI.

COURBES ENVELOPPES.

220. L'équation

$$f(x, y, a) = 0 \qquad (1)$$

représente une infinité de lignes AC, A'B', A''B'', ...



Si deux de ces lignes se coupent, le point d'intersection M est représenté par l'équation (1), jointe à

$$f(x, y, a + \Delta a) = 0. \qquad (2)$$

Δa diminuant jusqu'à zéro, le point M tend vers une position-limite m, déterminée par l'équation (1), combinée avec

$$\lim \frac{f(x, y, a + \Delta a) - f(x, y, a)}{\Delta a} = 0;$$

c'est-à-dire que les équations de m sont

$$f(x, y, a) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{df}{da} = 0. \tag{3}$$

Le lieu du point m est l'*enveloppe* des courbes données : chacune de celles-ci est une *enveloppée*. Pour avoir l'équation de l'enveloppe, il faut, dans chaque cas particulier, éliminer a entre les équations (1), (3).

221. Théorème. — *L'enveloppe, et chacune des enveloppées, se touchent en leur point commun.*

1° Le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppée AB, au point m, est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}. \tag{4}$$

2° Pour trouver le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe, au même point m, on devrait d'abord chercher l'équation de cette courbe ; mais il est plus simple de différencier l'équation (1), en y regardant a comme une fonction de x et de y, déterminée par l'équation (3). A ce point de vue, on a

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{da}\left[\frac{da}{dx} + \frac{da}{dy}\frac{dy}{dx}\right] = 0.$$

La seconde partie est nulle, en vertu de l'équation (3); donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

Ainsi, *les deux tangentes coïncident;* ce qui démontre le théorème.

Applications.

222. I. *Enveloppe des normales à la parabole.* — La normale est représentée par le système des équations

$$Y - y = -\frac{y}{p}(X - x), \qquad (5)$$

$$y^2 = 2px. \qquad (6)$$

Si l'on fait $\frac{y}{p} = -a$, l'équation (6) donne $x = \frac{1}{2}a^2p$, et l'équation (5) devient

$$Y = aX - ap - \frac{1}{2}a^3p;$$

ou, par un changement de notation,

$$y = ax - ap\left(1 + \frac{a^2}{2}\right).$$

L'équation (3) est donc

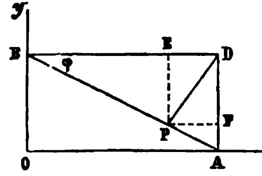
$$0 = x - p\left(1 + \frac{3}{2}a^2\right).$$

Éliminant a, on trouve

$$y^2 = \frac{8}{27}\frac{(x-p)^3}{p}.$$

La courbe représentée par cette équation est *la développée de la parabole* (**212**) : on lui a donné le nom de *seconde parabole cubique.*

223. II. *Enveloppe d'une droite* AB, *de longueur constante, glissant entre les côtés d'un angle droit.*



De

$$\frac{x}{\cos\varphi}+\frac{y}{\sin\varphi}=l, \qquad (7)$$

on tire, en prenant la dérivée,

$$\frac{x\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{y\cos\varphi}{\sin^2\varphi}=0,$$

ou

$$\frac{x}{\cos^3\varphi}=\frac{y}{\sin^3\varphi}. \qquad (8)$$

Les relations (7), (8) sont vérifiées par

$$x=l\cos^3\varphi,\quad y=l\sin^3\varphi. \qquad (9)$$

L'équation de l'enveloppe est donc

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}\ (^*).$$

224. *Remarque.* — Si l'on achève le rectangle OABD, puis que l'on projette le sommet D sur la diagonale AB, et le point P sur BD, AD, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{BE}&=\mathrm{BP}\cos\varphi=\mathrm{BD}\cos^2\varphi=\mathrm{BA}\cos^3\varphi,\\ \mathrm{AF}&=\mathrm{AP}\sin\varphi=\mathrm{AD}\sin^2\varphi=\mathrm{AB}\sin^3\varphi. \end{aligned}$$

Ces valeurs, comparées aux valeurs (9), pouvent que *l'enveloppée et l'enveloppe se touchent au point* P.

225. III. *Enveloppe des ellipses décrites par tous les points de la droite* AB.

(*) La courbe représentée par cette équation est appelée *hypccycloïde à quatre rebroussements* (p. 486).

Une quelconque de ces ellipses est représentée par le système des équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{10}$$
$$a+b=l.$$

Pour n'avoir qu'un seul paramètre, posons $a=l\cos^2\theta$, $b=l\sin^2\theta$: l'équation (10) devient

$$\frac{x^2}{\cos^4\theta}+\frac{y^2}{\sin^4\theta}=l^2.$$

La dérivée de celle-ci est

$$\frac{x^2}{\cos^6\theta}=\frac{y^2}{\sin^6\theta}.$$

Pour satisfaire à ces deux relations, il suffit de supposer

$$x=l\cos^3\theta,\quad y=l\sin^3\theta; \tag{11}$$

valeurs d'où l'on conclut

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}.$$

Ainsi, *l'enveloppe des ellipses décrites par les différents points de la droite* MB, *coïncide avec l'enveloppe de* AB.

226. *Remarques.* — I. Cette enveloppe commune est encore, comme on le verra plus loin, *l'hypocycloïde engendrée par un point d'une circonférence roulant à l'intérieur d'une circonférence quadruple.*

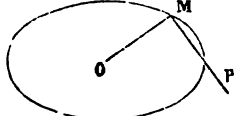
II. Si l'angle variable θ égale φ, le point M, représenté par les formules (11), coïncide avec P (**224**); et, en conséquence, *la droite* AB *est tangente, en* P, *à l'ellipse dont les demi-axes seraient*

$$a=\text{BP},\quad b=\text{AP}.$$

En effet, les valeurs précédentes rendent identiques la relation connue

$$a^2 = \mathrm{OA}.x.$$

227. IV. *Enveloppe de la perpendiculaire à l'extrémité du diamètre d'une ellipse.*



Soient x, y les coordonnées de M. Si l'on pose

$$x = a\cos\varphi,\quad y = b\sin\varphi,$$

on trouve que l'équation de MP est

$$y - b\sin\varphi = -\frac{a\cos\varphi}{b\sin\varphi}(x - a\cos\varphi),$$

ou

$$ax\cos\varphi + by\sin\varphi = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi. \qquad (12)$$

La dérivée relative à φ est

$$-ax\sin\varphi + by\cos\varphi = -2c^2\sin\varphi\cos\varphi. \qquad (13)$$

En éliminant φ, Tortolini est parvenu (p. 352) à l'équation

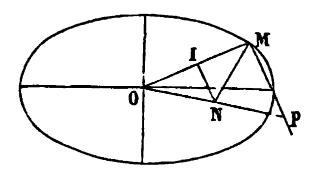
$$\left[4(a^4 - a^2b^2 + b^4) - 3(a^2x^2 + b^2y^2)\right]^3 =$$
$$\left[9a^2(2b^2-a^2)x^2+9b^2(2a^2-b^2)y^2-4(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)\right]^2.$$

Au lieu de la discuter, il vaut mieux résoudre les équations (12), (13), par rapport à x et y. On trouve ainsi :

$$x = \frac{a^2 + c^2\sin^2\varphi}{a}\cos\varphi,\quad y = \frac{b^2 - c^2\cos^2\varphi}{b}\sin\varphi;$$

et ces formules permettent de construire la courbe par points.

228. *Remarque.* — L'ellipse donnée est la *podaire* de l'enveloppe. Conséquemment (**15**), le point de contact P peut être déterminé par la construction suivante :



Après avoir mené la normale MN à l'ellipse, on élève IN perpendiculaire au milieu de OM, et l'on tire la droite ONP.

229. V. *Des rayons lumineux, parallèles, rencontrent une circonférence donnée. Trouver l'enveloppe des rayons réfléchis* (*).

Si l'on prend pour origine le centre C, et que l'on compte les abscisses parallèlement au rayon *incident* IM, on trouve, comme équation du rayon *réfléchi*, MR :

$$\frac{y - a \sin \varphi}{x - a \cos \varphi} = \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi},$$

ou
$$y \cos 2\varphi - x \sin 2\varphi = - a \sin \varphi. \qquad (1)$$

La dérivée, relative à φ, est

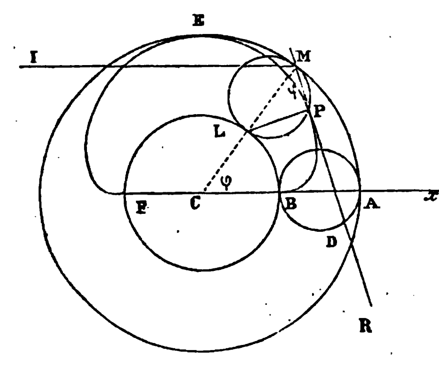
$$y \sin 2\varphi + x \cos 2\varphi = \frac{a}{2} \cos \varphi. \qquad (2)$$

Cette équation représente une perpendiculaire à MR. De plus, elle est vérifiée par

$$x = \frac{a}{2} \cos \varphi, \quad y = \frac{a}{2} \sin \varphi.$$

Donc, si l'on prend le milieu L de CM, et que l'on projette le point L en P, sur MR, P est un point de l'enveloppe cherchée.

230. Du point C, comme centre, décrivons la circonférence BL; puis, sur ML, comme diamètre, la circonférence MPL. Les longueurs des arcs BL, LP sont, respectivement, $\frac{a}{2} \varphi$, $\frac{a}{4} . 2\varphi$; donc



$$arc\, \text{BL} = arc\, \text{LP}.$$

(*) Cette enveloppe est l'une des courbes appelées *caustiques par réflexion*.

Par conséquent, *si la circonférence* MPL, *d'abord confondue avec* BDA, *roule sur la circonférence* BC, *le point* P *de la circonférence mobile, dont* B *est la position initiale, décrit l'enveloppe* BPEF; ou, ce qui est équivalent :

Quand des rayons lumineux, parallèles, se réfléchissent sur une circonférence; la caustique par réflexion est une épicycloïde, engendrée par un point d'une circonférence égale au quart de la première, roulant, extérieurement, sur une circonférence concentrique à la circonférence donnée, et moitié de celle-ci.

Exercices.

I. D'un point C, pris sur une circonférence donnée O, on abaisse CD perpendiculaire au diamètre fixe AOB; puis, du point C comme centre, avec CD pour rayon, on trace une circonférence CEF. On demande : 1° les valeurs des coordonnées du point E où la circonférence variable touche son enveloppe; 2° l'expression du rayon du cercle osculateur de l'enveloppe; 3° les valeurs des coordonnées du centre de ce cercle; 4° l'équation de l'enveloppe; 5° l'équation de la développée de cette courbe.

II. Par un point A, pris arbitrairement sur une parabole donnée, on mène deux cordes AB, AC, normales en B, C, à la courbe. Quelle est l'enveloppe de la corde BC?

III. Une circonférence C roule sur une droite fixe. Quelle est l'enveloppe d'une tangente T?

IV. Trouver les enveloppes des lignes représentées par

$$\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)^2=1,$$

en supposant : 1° que α soit variable; 2° que β soit variable; 3° que les deux paramètres varient.

V. Soient A'M, A'M' les cordes menées, d'une des extrémités du grand axe d'une ellipse, aux extrémités d'un diamètre quelconque ; soient P, P' les points où les cordes coupent le petit axe. Sur PP', comme diamètre, on décrit une circonférence. Quelle est l'enveloppe de cette ligne?

Réponse : Deux points.

VI. Trouver le rayon de courbure de l'enveloppe des lignes représentées par $f(x, y, \alpha) = 0$.

VII. Théorème. — *Si l'équation des enveloppées est*

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{y}{\beta}\right)^m = 1 \text{ (*)},$$

et que les paramètres α, β satisfassent à la condition

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^p + \left(\frac{\beta}{b}\right)^p = 1,$$

l'enveloppe est représentée par

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}} = 1.$$

De plus, ρ, ρ_1 étant les rayons de courbure des deux lignes, au point où elles se touchent, on a

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{m-1}{\dfrac{mp}{m+p} - 1}.$$

(Ph. Gilbert.)

(*) Ces courbes, dont la développée de l'ellipse est un cas particulier ([illegible]), sont appelées *storoïdes*.

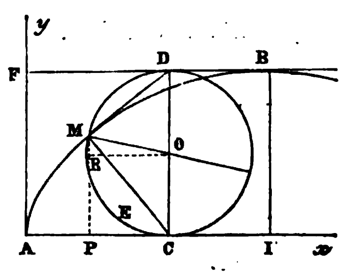
CHAPITRE XVII.

CYCLOÏDE ET ÉPICYCLOÏDES.

De la cycloïde.

221. *Définition.* — *La cycloïde est la courbe engendrée par un point d'une circonférence qui roule, sans glisser, sur une droite fixe.*

222. *Équations de la cycloïde.* — A étant la position initiale du point décrivant M, on a CEM = CA. De là résulte que, si l'on représente par a le rayon, et par θ la *mesure* de l'angle COM:



$$x = AC - CP = a\theta - a\sin\theta,$$
$$y = PR + RM = a - a\cos\theta;$$

ou

$$x = a(\theta - \sin\theta), \qquad (1)$$
$$y = a(1 - \cos\theta). \qquad (2)$$

Ces formules peuvent servir à discuter et à construire la courbe. Elles donnent

$$\cos\theta = \frac{a-y}{a}, \quad \sin\theta = \pm\frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2} \ (^*);$$

puis

$$x = a.\text{arc}\cos\frac{a-y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2} \ (^*). \qquad (3)$$

(*) Si le point M est compris entre les sommets A, B, l'arc θ est moindre que π : on doit donc, dans ce cas, adopter les signes supérieurs. Au contraire, si M est au delà du sommet B, on a

$$\theta > \pi, \ \sin\theta < 0; \text{ etc.}$$

223. *Tangente et normale.* — On a

$$dx = a\,(1 - \cos\theta)\,d\theta = 2a\sin^2\frac{1}{2}\theta d\theta,\quad dy = a\sin\theta d\theta\,; \quad (4)$$

par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta} = \cot\frac{1}{2}\theta. \quad (5)$$

Si l'on trace la corde MD :

$$\text{MDO} = \frac{1}{2}\theta,\quad \text{tg FDM} = \cot\frac{1}{2}\theta\,;$$

donc MD *est la tangente*. Par suite, *la droite* MC, *qui joint le point décrivant au point de contact* C, *est la normale*. Cette propriété subsiste pour toutes les *Roulettes*, résultant du roulement d'une ligne sur une ligne fixe.

224. *Longueur de l'arc.* — On tire, des équations (4),

$$ds^2 = 2a^2\,(1 - \cos\theta)\,d\theta^2 = 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta\,.\,d\theta^2\,;$$

ou

$$ds = 2a\sin\frac{1}{2}\theta d\theta. \quad (6)$$

Cette valeur de ds prouve que

$$s = \text{C} - 4a\cos\frac{1}{2}\theta.$$

Si l'on prend le *sommet* A pour origine des arcs, la *constante* C est déterminée par la condition

$$0 = \text{C} - 4a\,;$$

donc

$$\text{AM} = s = 4a\left(1 - \cos\frac{1}{2}\theta\right). \quad (7)$$

Ainsi, *la cycloïde est une courbe rectifiable*. Si l'on repré-

sente par l la longueur de la cycloïde entière, on a donc, en faisant $\theta = 2\pi$,

$$l = 8a : \qquad (8)$$

la longueur de la cycloïde égale quatre fois le diamètre du cercle générateur.

225. *Remarques.* — I. Soit B le sommet, déterminé par $\theta = \pi$: il résulte, des formules (7) et (8), que

$$\text{arc MB} = 4a \cos \frac{1}{2}\theta.$$

Mais, dans le triangle isoscèle MDO,

$$\text{MD} = 2a \cos \frac{1}{2}\theta ;$$

donc

$$\textit{arc}\ \text{MB} = 2 . \textit{corde}\ \text{MD}. \qquad (9)$$

II. Soit G le point diamétralement opposé à M. A cause de

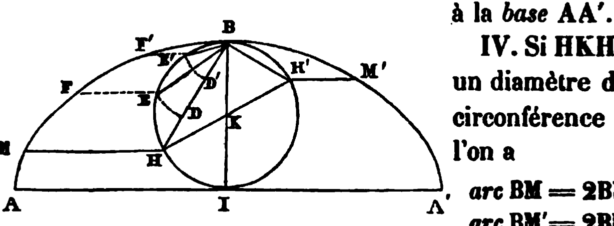
$$\text{AC} = \textit{arc}\ \text{CEM}, \quad \text{AI} = \textit{arc}\ \text{MCG},$$

l'on a

$$\text{CI} = \textit{arc}\ \text{CG}.$$

Ainsi, pendant que M décrit la cycloïde AMB, le point G décrit une cycloïde égale, dont I est l'origine, et F le sommet.

III. Pour *diviser, en* n *parties égales, l'arc* MB, *il suffit de diviser, en* n *parties égales, la corde* BH; de tracer les arcs DE, D'E', ...; puis les droites EF, E'F', ... parallèles à la *base* AA'.



IV. Si HKH' est un diamètre de la circonférence BI, l'on a

$$\textit{arc}\ \text{BM} = 2\text{BH},$$
$$\textit{arc}\ \text{BM'} = 2\text{BH'};$$

et, par conséquent,

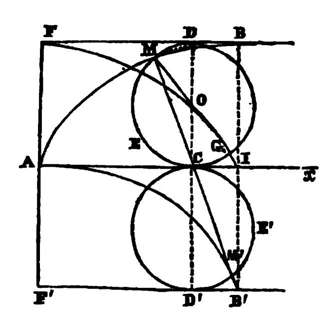
$$(\text{arc BM})^2 + (\text{arc BM}')^2 = 16a^2 \ (^*).$$

226. *Rayon de courbure.* — Prenant toujours θ pour variable indépendante, on trouve

$$d^2x = a \sin\theta d\theta^2, \quad d^2y = a\cos\theta d\theta^2;$$

puis

$$dxd^2y - dyd^2x = a^2\left[(1-\cos\theta)\cos\theta - \sin^2\theta\right]d\theta^3$$
$$= -2a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta . d\theta^3.$$



Et comme

$$ds^2 = 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta d\theta^2;$$

la formule

$$\rho = \pm\frac{ds^3}{dxd^2y - dyd^2x}$$

devient

$$\rho = 4a\sin\frac{1}{2}\theta. \qquad (10)$$

On a aussi

$$\text{MC} = 2a\sin\frac{1}{2}\theta;$$

donc

$$\rho = 2\text{MC}.$$

Par conséquent, *le centre du cercle osculateur est le point* M', *symétrique de* M, *relativement au point de contact* C.

En particulier, le centre de courbure, pour le sommet B, est le point B', symétrique de B relativement à la base Ax de la cycloïde.

(*) Cette remarque est due à M. Mennesson, Capitaine d'artillerie.

227. *Développée.* — *La développée,* c'est-à-dire le lieu des points M', *est une cycloïde égale à la première* (*).

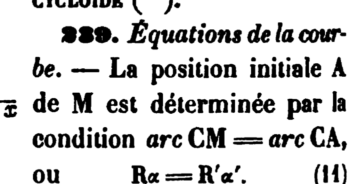
Les points M, M' étant symétriques relativement au point C, l'on a

$$arc\ D'M' = arc\ DM = arc\ CG.$$

Donc, si l'on fait glisser, parallèlement à FF', la partie supérieure de la figure, la cycloïde IF, lieu du point G, viendra coïncider avec le lieu du point M : ce lieu est donc une cycloïde égale aux deux autres.

Des épicycloïdes.

228. *Définition.* — *Si la circonférence* O' *roule sur la circonférence fixe* O, *un point quelconque* M *de la première décrit une courbe appelée* ÉPICYCLOÏDE (**).



229. *Équations de la courbe.* — La position initiale A de M est déterminée par la condition $arc\ CM = arc\ CA$,

ou $$R\alpha = R'\alpha'. \quad (11)$$

Si l'on prend le centre C pour origine, et la droite OA pour axe des abscisses, les équations du point M sont

$$x = (R + R') \cos \alpha - R' \cos (\alpha + \alpha'), \quad (12)$$
$$y = (R + R') \sin \alpha - R' \sin (\alpha + \alpha'). \quad (13)$$

(*) Le *pendule cycloïdal*, que l'on voit dans quelques cabinets de Physique, est fondé sur cette propriété.

(**) Quelques auteurs emploient les dénominations d'*épicycloïde* et d'*hypocycloïde*, en réservant celle-ci au cas où la circonférence mobile est *intérieure* à la circonférence fixe. C'est ce que nous avons fait, nous-même, à propos de l'*enveloppe d'une droite glissant entre les côtés d'un angle droit* (222).

Il restera donc, dans chaque cas particulier, à éliminer α et α' : cette élimination, presque toujours difficile, est souvent impossible.

240. *Remarques.* — I. Si l'on représente par m le rapport des rayons R, R', on peut, aux formules précédentes, substituer

$$x = R'\left[(m+1)\cos\alpha - \cos(m+1)\alpha\right], \qquad (14)$$
$$y = R'\left[(m+1)\sin\alpha - \sin(m+1)\alpha\right]. \qquad (15)$$

Celles-ci permettent de discuter la courbe.

II. Quand le cercle O' roule à l'intérieur du cercle O, les formules (12), (13) doivent être ainsi modifiées :

$$x = (R - R')\cos\alpha + R'\cos(\alpha' - \alpha), \qquad (16)$$
$$y = (R - R')\sin\alpha - R'\sin(\alpha' - \alpha); \qquad (17)$$

et les formules (14), (15) :

$$x = R'\left[(m-1)\cos\alpha + \cos(m-1)\alpha\right], \qquad (18)$$
$$y = R'\left[(m-1)\sin\alpha - \sin(m-1)\alpha\right]. \qquad (19)$$

Applications.

241. I. Si $m = 1$, il est visible que l'épicycloïde est semblable à la podaire du point A, relativement au cercle O (15). Cette podaire est appelée : *Limaçon de Pascal.*

Dans ce cas très-simple, les équations (14), (15) deviennent

$$x = R(2\cos\alpha - \cos 2\alpha), \quad y = R(2\sin\alpha - \sin 2\alpha).$$

Transportant l'origine en A, on trouve, au lieu de ces valeurs :

$$x = 2R\cos\alpha(1 - \cos\alpha), \quad y = 2R\sin\alpha(1 - \cos\alpha).$$

Il résulte, de celles-ci, que l'équation de la courbe, en coordonnées polaires, est

$$u = 2R(1 - \cos\omega); \tag{20}$$

résultat évident à l'inspection de la figure.

242. *Hypocycloïde à quatre rebroussements.* — Dans les formules (18), (19), supposons $m = 4$: elles deviennent

$$x = R'(3\cos\alpha + \cos 3\alpha), \quad y = R'(3\sin\alpha - \sin 3\alpha);$$

ou

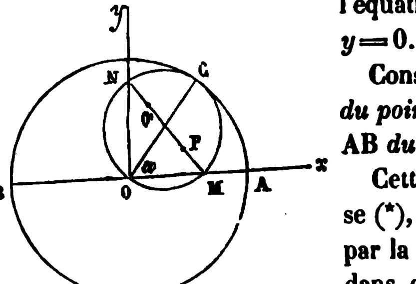
$$x = R\cos^3\alpha, \quad y = R\sin^3\alpha.$$

L'équation de l'épicycloïde est donc

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

Ainsi, *quand une circonférence dont le rayon est* $\frac{R}{4}$, *roule à l'intérieur d'une circonférence dont le rayon est* R, *l'épicycloïde engendrée par un point de la première ligne coïncide avec l'enveloppe d'une droite égale à* R, *dont les extrémités glissent sur les côtés d'un angle droit* (226).

243. *Épicycloïde rectiligne.* — Si l'on suppose $m = 2$, l'équation (19) se réduit à $y = 0$.



Conséquemment, *le lieu du point* M *est le diamètre* AB *du cercle fixe.*

Cette propriété curieuse (*), à peu près évidente par la figure, est appliquée dans certains engrenages.

(*) On l'attribue à Cardan.

Rectification des épicycloïdes.

244. On tire, des formules (14), (15) :

$$dx = (m+1)\,R'\left[-\sin\alpha + \sin(m+1)\alpha\right]d\alpha,$$
$$dy = (m+1)\,R'\left[+\cos\alpha - \cos(m+1)\alpha\right]d\alpha.$$

Il résulte, de ces valeurs,

$$ds = 2(m+1)\,R'\sin\frac{m}{2}\alpha d\alpha.$$

Le second membre est la différentielle de

$$C - 4\frac{m+1}{m}R'\cos\frac{m}{2}\alpha.$$

Par conséquent, si l'on détermine la constante C par la condition que $\alpha = 0$ donne $s = 0$, on a

$$s = 4\frac{(m+1)}{m}R'\left[1 - \cos\frac{m}{2}\alpha\right];$$

ou, plus simplement,

$$s = 8\frac{m+1}{m}R'\sin^2\frac{m}{4}\alpha;$$

ou enfin, à cause de $mR' = R$, $m\alpha = \alpha'$:

$$s = 8\frac{R+R'}{R}R'\sin^2\frac{\alpha'}{4}. \qquad (21)$$

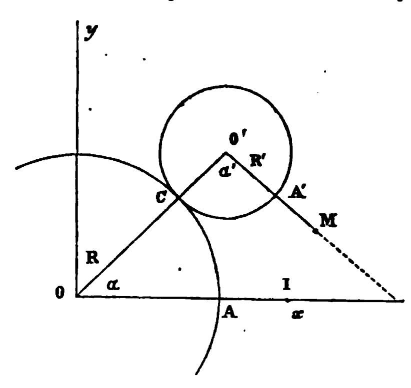
D'après cette formule, la longueur de l'arc complet d'épicycloïde, répondant à $\alpha' = 2\pi$, est

$$l = 8\frac{R+R'}{R}R'.$$

Ainsi, *toutes les épicycloïdes sont rectifiables.*

Épicycloïdes allongées ou accourcies.

245. Si le point M, au lieu d'appartenir à la circonférence O′, est simplement *lié* à celle-ci, la courbe décrite prend le nom d'épicycloïde *allongée* ou *accourcie*, selon que M est *extérieur* ou *intérieur* au cercle O′.



Si l'on conserve les notations employées ci-dessus (**228**), et que l'on désigne, en outre, par d la distance O′M, on a, sans nouveaux calculs :

$$\left.\begin{aligned} R\alpha &= R'\alpha', \\ x &= (R + R')\cos\alpha - d\cos(\alpha+\alpha'), \\ y &= (R + R')\sin\alpha - d\sin(\alpha+\alpha'). \end{aligned}\right\} (22)$$

Applications.

246. I. Soient $R' = R$, $d = 2R$. Les équations (22) deviennent

$$x = 2R(\cos\alpha - \cos 2\alpha), \quad y = 2R(\sin\alpha - \sin 2\alpha);$$

et, si l'on transporte l'origine en I, position *initiale* de M :

$$x = 2R(-1 + \cos\alpha - \cos 2\alpha) = 2R\cos\alpha(1 - 2\cos\alpha),$$
$$y = 2R\sin\alpha(1 - 2\cos\alpha).$$

Il résulte, de ces valeurs, que l'équation de la courbe, en coordonnées polaires, est

$$u = 2R(1 - \cos\omega);$$

ou plutôt, par le changement de u en $-u$:

$$u = 4R\cos\omega - 2R.$$

Conséquemment, l'*épicycloïde* dont il s'agit *est une conchoïde du cercle* (20).

II. Supposons, comme au n° 243, que la circonférence O' roule à l'intérieur d'une circonférence double. Nous aurons, au lieu des formules (16) et (17) :

$$x = (R' + d)\cos\alpha, \quad y = (R' - d)\sin\alpha;$$

et, par l'élimination de α :

$$\frac{x^2}{(R'+d)^2} + \frac{y^2}{(R'-d)^2} = 1,$$

équation d'une *ellipse*. Ce résultat est visible à l'inspection de la figure. En effet, *le diamètre* MN (243) *est inscrit à l'angle droit* yOx (225).

Exercices.

I. Théorème. — *Toute épicycloïde, engendrée par le mouvement d'un cercle* C' *roulant sur un cercle fixe* C, *peut être engendrée par le mouvement d'un autre cercle* C'' *roulant sur le même cercle fixe* C. R, R', R'' *étant les rayons, la somme ou la différence des deux premiers égale le troisième, suivant que l'épicycloïde est intérieure ou extérieure au cercle fixe.* (Euler.)

II. Théorème. — *La développée d'une épicycloïde est une épicycloïde semblable à la première.*

III. Théorème. — *Toute courbe plane est une roulette.*

IV. Théorème. — *Quand une courbe* ACB *roule sur une courbe* DCE, *en entraînant une ligne* FPG, *l'enveloppe de celle-ci coïncide avec l'enveloppe des trajectoires de tous ses points.*

V. Théorème. — *Quand une parabole roule sur une droite, le foyer décrit une chaînette.*

VI. Théorème. — *Quand une spirale logarithmique roule sur une droite, le pôle décrit une droite.*

CHAPITRE XVIII.

POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES (*).

247. Les *points singuliers* d'une courbe sont ceux qui présentent quelque particularité remarquable, indépendante de la position des axes coordonnés : les points *maximum* ou *minimum* ne sont pas des points singuliers.

248. *Points d'inflexion.* — On a vu (**179**) qu'ils sont déterminés par les équations

$$y = f(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

249. *Points multiples.* — On appelle *point multiple* celui où se coupent divers arcs. En un pareil point, la courbe admet plus d'une tangente.

Soit, par exemple,

$$y = 1 \pm x\sqrt{x+1}.$$

Si l'on prend les deux formules :

$$y_1 = 1 + x\sqrt{x+1}, \quad y_2 = 1 - x\sqrt{x+1},$$

on voit que, pour $x = 0$, $y_1 = y_2 = 1$. D'ailleurs, de $x = -\varepsilon$ à $x = +\varepsilon$, y_1 croît et y_2 décroît. Il y a donc deux arcs qui se coupent en B. En outre :

$$\frac{dy_1}{dx} = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}, \quad \frac{dy_2}{dx} = -\sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}};$$

(*) Ce chapitre ne contient que de simples notions. Pour la théorie complète des points singuliers, le lecteur peut consulter une remarquable Thèse de M. Briot (*Journal de Liouville*, tome X).

et, pour $x=0$:

$$\frac{dy_1}{dx}=+1, \quad \frac{dy_2}{dx}=-1.$$

250. Soit

$$f(x,y)=0 \tag{1}$$

l'équation de la courbe : nous supposons que le premier membre est un polynôme entier. En un point quelconque, où la tangente est *unique*, elle est déterminée par

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}};$$

ce qui exige que les deux termes de la fraction ne soient pas nuls simultanément. Au contraire, pour un point multiple, on doit avoir, en même temps,

$$\frac{df}{dx}=0, \quad \frac{df}{dy}=0. \tag{2}$$

Si le point est *double*, les coefficients angulaires des deux tangentes sont déterminés par l'équation

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dxdy}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2f}{dxdy}+\frac{d^2f}{dy^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}=0,$$

ou

$$\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2f}{dx^2}=0, \tag{3}$$

dont les racines doivent être *réelles et inégales*.

Si, avec les relations (2), on a encore

$$\frac{d^2f}{dy^2}=0, \quad \frac{d^2f}{dxdy}=0, \quad \frac{d^2f}{dx^2}=0; \tag{4}$$

c'est-à-dire si les valeurs de x, y, qui satisfont aux équa-

tions (2), annulent les trois dérivées du second ordre, l'équation (3) devient identique; le point singulier est ordinairement *triple*; l'équation (3) est remplacée par

$$\frac{d^3f}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\frac{d^3f}{dy^2dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{d^3f}{dydx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d^3f}{dx^3} = 0 : \quad (5)$$

cette équation doit avoir ses racines réelles et inégales. Ainsi de suite.

251. *Applications.* — I.

$$(y-1)^2 - x^2(x+1) = 0 \text{ (*)}.$$

Les équations (2) sont vérifiées par $x=0$, $y=0$. L'équation (3) devient, à cause de ces valeurs,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$$

II. $x^4 - x^2y + y^3 = 0$, $\frac{df}{dx} = 4x^3 - 2yx$, $\frac{df}{dy} = -x^2 + 3y^2$:

l'origine est *peut-être* un point multiple. Prenant les dérivées secondes, on trouve

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x^2 - 2y, \quad \frac{d^2f}{dxdy} = -2x, \quad \frac{d^2f}{dy^2} = 6y.$$

Pour $x=0$, $y=0$, l'équation (3) devient identique : formons l'équation (5). A cause de

$$\frac{d^3f}{dx^3} = 24x, \quad \frac{d^3f}{dx^2dy} = -2, \quad \frac{d^3f}{dxdy^2} = 0, \quad \frac{d^3f}{dy^3} = 6,$$

cette équation est

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx} = 0.$$

(*) Cet exemple a été traité ci-dessus (240).

Conséquemment,

$$\frac{dy}{dx}=0, \quad \frac{dy}{dx}=\pm 1:$$

l'origine est un point *triple*.

252. *Points de rebroussement.* — On appelle ainsi les points où deux branches de courbe s'arrêtent, de manière à rester d'un même côté de la normale en ce point.

Le rebroussement est de *première espèce* quand la tangente commune est entre les deux arcs : dans le cas contraire, il est de *seconde espèce*.

Soit

$$y=x^2\left(1\pm\sqrt{x}\right):$$

l'abscisse ne peut être négative; de plus, $\lim \frac{y}{x}=0$. Enfin, quand x est moindre que 1, les deux valeurs de y sont positives. Il y a donc, à l'origine, rebroussement de seconde espèce.

253. Si, dans l'équation (1), x est regardé comme un paramètre variable, deux des valeurs de y doivent, pour le point cherché, devenir égales entre elles. D'après la *théorie* des *racines égales* (Alg., **212**), on a, pour ce même point,

$$\frac{df}{dy}=0. \tag{6}$$

En outre,

$$\frac{df}{dx}=0,$$

sans quoi la tangente au point de rebroussement serait parallèle à l'axe des ordonnées; ce qu'on peut ne pas supposer. Si l'on élimine y entre les équations (1), (6), on arrive à une relation

$$\varphi(x)=0, \tag{7}$$

donnant les valeurs de x auxquelles répondent deux valeurs égales de y.

Soit a une racine de cette équation (7). Si, quand x varie de $a-\varepsilon$ à $a+\varepsilon$, la fonction $\varphi(x)$ change de signe, *il peut y avoir rebroussement* au point dont l'abscisse est a. Il faut, en outre, que l'équation (3) soit vérifiée par des valeurs *réelles et égales* de $\frac{dy}{dx}$; ce qui donne la condition

$$\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2 = \frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2}.$$

254. *Application :*

$$(y^2-x^2)^2 - 9x(x-1)^3 = 0. \qquad (8)$$

Les équations (2) sont

$$4(y^2-x^2)\,y = 0,$$
$$4(y^2-x^2)\,x + 9(x-1)^3 + 27x(x-1)^2 = 0.$$

Ces trois équations sont vérifiées par $x=1$, $y=1$. De plus, pour ces valeurs, l'équation (3) devient

$$\left(\frac{dy}{dx}-1\right)^2 = 0.$$

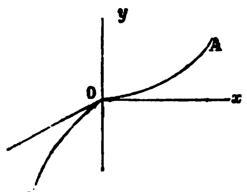
Enfin, sans qu'il soit besoin de former la fonction $\varphi(x)$, on reconnaît, à l'inspection de l'équation (8), qu'on ne peut supposer $x = 1-\varepsilon$. En résumé, $x=1$, $y=1$ sont les coordonnées d'un point de rebroussement.

255. *Points anguleux.* — Si deux branches viennent se terminer en un même point, de manière que leurs tangentes soient différentes, on donne à ce point le nom de *point anguleux :* le point de rebroussement en est un cas-limite.

Soit, par exemple,

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

Suivant que x est positif ou négatif, $\lim \frac{y}{x} = 0$ ou 1. Ainsi, la courbe a la forme indiquée ci-contre : l'origine est un point anguleux.



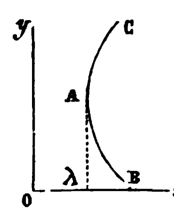
256. *Points d'arrêt.* — Un point d'arrêt est celui où une branche de courbe *s'arrête* brusquement. L'équation

$$y = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}},$$

représente une courbe qui a deux points d'arrêt, appartenant à l'axe des ordonnées, et symétriquement placés par rapport à l'origine (*).

257. Théorème. — *Une courbe algébrique ne peut avoir ni point d'arrêt ni point anguleux.*

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe, F étant un polynôme entier. Si l'on regarde x comme un paramètre variable, et que pour $x = \lambda - \varepsilon$, une valeur de y soit imaginaire, cette valeur n'est pas unique : il y en a une seconde, conjuguée de la première. Pour $x = \lambda$, ces deux valeurs de y deviennent égales; et, pour $x = \lambda + \varepsilon$, elles sont réelles et inégales.



Ainsi, un *point-limite* A est toujours celui où se *raccordent* deux arcs AB, AC. Cette simple remarque prouve la première partie du théorème.

(*) L'équation n'étant pas altérée quand x et y changent simultanément de signe, l'origine est un *centre* de la courbe.

Relativement à la seconde, observons que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}.$$

La fraction a ses termes entiers; donc elle ne peut devenir discontinue qu'en passant par l'infini (*).

258. *Points isolés.* — Un *point isolé* est celui où ne passe aucun arc de la courbe, et dont les coordonnées vérifient cependant l'équation de celle-ci.

L'équation $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$, qui représente la podaire de l'ellipse, relativement au centre, est vérifiée par $x = 0$, $y = 0$: l'origine est un point isolé.

259. *Remarque.* — Quand on cherche la *podaire* d'une courbe, relativement à un point donné, on trouve souvent, comme dans l'exemple précédent, que celui-ci est un point isolé, dont les coordonnées satisfont à l'équation du lieu. Il en est ainsi, en particulier, pour la podaire de l'ellipse, relativement à l'un des foyers. La solution de ce problème, bien simple (**), conduit à un résultat singulier et remarquable : *chaque foyer se comporte comme une tangente dont le coefficient serait* $\sqrt{-1}$.

Exercices.

I. $x^4 + y^4 - 2x^2y - 2x^2y^2 + y^3 = 0$ (*point triple*).

II. $x^4 - 2y^3 - 3y^2 - 3x^2 + 1 = 0$ (*trois points doubles*).

III. $y = \frac{1}{l(1+x)} + \frac{1}{l(1-x)}$, $y = e^{\frac{1}{x}}$ (*points d'arrêt*).

(*) On peut voir, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (tome I, p. 176), une autre démonstration de ce théorème.

(**) On sait que, dans ce cas, la podaire est la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre (p. 331).

IV. $y = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ (*point anguleux*).

V. $u^3 - 3u \cos^2 \omega + 2 \cos^3 \omega = 0$, $u^3 - 3u \cos \omega + 2 = 0$ (*points isolés*).

VI. $u = \frac{1 - \cos \omega}{\sin \omega - \cos \omega}$ (*point double, points d'inflexion, point de rebroussement*).

VII. $y^2 = x \sin^2 x$ (*une infinité de points doubles et de points isolés*).

VIII. $y = \cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)$ (*une tige ployée*).

IX. $y = 2 \cos\left(\sqrt{1 - x}\right) \pm (1 - x) x^{\frac{5}{2}}$ (*une feuille de laurier*).

X. $y = \cos\left(\sqrt{a - x}\right) \pm \sqrt{(a - x)\left(a \pm \sqrt{ax}\right)}$ (*deux feuilles de laurier*).

XI. $x = \left[y - \cos\left(\sqrt{a}\right)\right]^2 \left[1 \pm \sqrt{1 - y + \cos\left(\sqrt{x}\right)}\right]$ (*une feuille et sa tige*) (*).

CHAPITRE XIX.

DES LIGNES A DOUBLE COURBURE.

Équations de la ligne.

260. Une ligne à *double courbure*, ou ligne *non plane*, rapportée à trois axes rectilignes, rectangulaires pour plus de simplicité, est complètement déterminée si l'on se donne deux équations entre les coordonnées x, y, z de chacun de ses points. Le plus souvent, ces équations sont

(*) Les quatre derniers exemples sont dus à M. Plateau, l'illustre physicien *aveugle*. (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, 1877.)

celles de deux des ***projections*** de la courbe, c'est-à-dire qu'elles se réduisent, par exemple, à

$$x = f(z), \tag{1}$$
$$y = \varphi(z). \tag{2}$$

361. *Remarque.* — L'équation (1) appartient, non-seulement à une courbe située sur le plan zx, mais encore à un cylindre ayant cette courbe pour directrice, et dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oy. De même, l'équation (2) représente une surface cylindrique, parallèle à Ox.

362. Plus généralement, la courbe à double courbure proposée peut être définie par les équations de deux surfaces dont elle est l'intersection; savoir :

$$F(x, y, z) = 0, \tag{3}$$
$$F_1(x, y, z) = 0. \tag{4}$$

363. Enfin, si l'on regarde la courbe comme la *trajectoire* d'un point mobile, on peut supposer que l'on donne les valeurs de x, y, z en fonction d'une *variable indépendante* t : les équations précédentes sont alors remplacées par

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{5}$$

Ce troisième système conduit, en général, à des formules dans lesquelles x, y, z entrent *symétriquement;* ce qui n'a pas lieu quand on adopte les autres modes de représentation.

Différentielle de l'arc.

364. La démonstration donnée pour les courbes planes s'applique aux lignes à double courbure. Conséquemment,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{6}$$

quelle que soit la variable indépendante.

Tangente.

365. On démontre, en Géométrie, que *la projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de la courbe.* D'après cela, si la courbe est déterminée par les équations (1), (2), les équations de la tangente sont

$$X - x = \frac{dx}{dz}(Z - z), \quad Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z); \qquad (7)$$

ou, sous une forme plus symétrique :

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}. \qquad (8)$$

Dans le cas plus général des équations (3), (4), on tire, de celles-ci :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dz} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dz} + \frac{dF}{dz} = 0, \\ \frac{dF_1}{dx}\frac{dx}{dz} + \frac{dF_1}{dy}\frac{dy}{dz} + \frac{dF_1}{dz} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Nous devrions donc, pour trouver les équations de la tangente, résoudre les équations (9) par rapport à $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$; puis substituer, dans les équations (7), les valeurs trouvées. Mais il est équivalent, et beaucoup plus simple, d'opérer d'une manière inverse en substituant, dans les équations (9), les valeurs de $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, tirées des relations (7). On trouve ainsi :

$$(X - x)\frac{dF}{dx} + (Y - y)\frac{dF}{dy} + (Z - z)\frac{dF}{dz} = 0, \qquad (10)$$

$$(X - x)\frac{dF_1}{dx} + (Y - y)\frac{dF_1}{dy} + (Z - z)\frac{dF_1}{dz} = 0. \qquad (11)$$

266. *Remarque.* — Pour une raison que nous donnerons bientôt, chacun des plans représentés par les dernières équations est appelé *plan tangent* à la surface correspondante.

267. *Angles de la tangente avec les axes.* — Si la courbe est représentée par les équations (5), les équations de la tangente sont

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}. \qquad (8)$$

Or, α, β, γ étant les angles dont il s'agit, on a :

$$\frac{\cos\alpha}{X - x} = \frac{\cos\beta}{Y - y} = \frac{\cos\gamma}{Z - z};$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz}; \qquad (12)$$

et enfin, par la relation (6) :

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}. \qquad (13)$$

268. Dorénavant, nous représentons par a, b, c les cosinus *directifs* de la tangente; de manière que nous aurons :

$$\cos\alpha = a = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = b = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = c = \frac{dz}{ds}. \qquad (14)$$

Plan normal.

269. Ce plan est celui qui est perpendiculaire à la tangente, au point de contact. Il a donc pour équation

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0. \qquad (15)$$

Angle de contingence.

270. Pour calculer l'angle ε, formé par les tangentes en deux points de la courbe, infiniment voisins (**211**), nous rappellerons d'abord deux formules de Géométrie analytique.

1° Soient a, b, c les cosinus directifs d'une droite D; et a', b', c' les quantités analogues, relatives à une seconde droite D'. Soit V l'angle des deux droites. Des relations connues :

$$\cos V = aa' + bb' + cc', \quad a^2+b^2+c^2=1, \quad a'^2+b'^2+c'^2=1 \text{ (*)},$$

on déduit

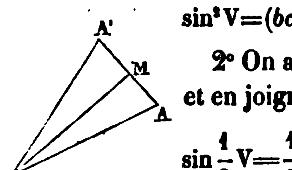
$$\sin^2 V = 1 - (aa' + bb' + cc')^2,$$

ou (**)

$$\sin^2 V = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2;$$

ou enfin

$$\sin^2 V = (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2. \text{ (A)}$$



2° On a aussi, en prenant OA=OA'=1, et en joignant l'origine au milieu M de AA':

$$\sin \frac{1}{2} V = \frac{1}{2} \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2}. \text{ (B)}$$

Si l'angle V est infiniment petit,

$$a' = a + da, \quad b' = b + db, \quad c' = c + dc, \quad ab' - ba' = adb - bda,$$

etc.;

(*) *Manuel des Candidats*, tome II, pp. 10, 11.

(**) Si on laissait le second membre sous la forme

$$1 - (aa' + bb' + cc')^2,$$

on ne pourrait le décomposer en une *somme de trois carrés*. C'est pour arriver à ce remarquable résultat, que l'*on remplace l'unité* par

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2).$$

donc, en négligeant un infiniment petit du troisième ordre (●) :

$$V^2 = (bdc - cdb)^2 + (cda - adc)^2 + (adb - bda)^2, \quad (A')$$
$$V^2 = da^2 + db^2 + dc^2. \quad (B')$$

Dans le cas où la droite OA est parallèle à la tangente d'une courbe, au point (x, y, z) :

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds}; \quad (14)$$

donc, par la formule (B') :

$$\varepsilon^2 = da^2 + db^2 + dc^2. \quad (16)$$

Binormale.

271. M. de Saint-Venant a donné ce nom à la *droite perpendiculaire à deux tangentes consécutives*. Pour la déterminer en direction, remarquons d'abord que, si l, m, n sont les cosinus directifs d'une perpendiculaire à deux droites OA, OA', on a, en conservant les notations employées ci-dessus :

$$al + bm + cn = 0, \quad a'l + b'm + c'n = 0, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

On satisfait à ces équations en prenant

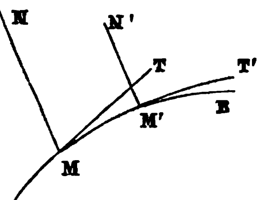
$$\frac{l}{bc' - cb'} = \frac{m}{ca' - ac'} = \frac{n}{ab' - ba'} = \pm \frac{1}{\sin V}.$$

Conséquemment, si les droites sont deux tangentes consécutives :

$$\frac{l}{bdc - cdb} = \frac{m}{cda - adc} = \frac{n}{adb - bda} = \pm \frac{1}{\varepsilon}. \quad (17)$$

272. *Remarque.* — De même que la binormale est perpendiculaire à deux tangentes consécutives, *la tangente est perpendiculaire à deux binormales consécutives.*

Cette proposition, à peu près évidente par la Géométrie, résulte aussi des calculs précédents.



Quand on passe du point M de la courbe, au point infiniment voisin M′, l'équation

$$al + bm + cn = 0,$$

mise sous la forme

$$\sum al = 0,$$

donne

$$\sum al' + \sum la' = 0;$$

les accents désignant des dérivées (*).

La seconde somme est nulle, parce que la binormale est perpendiculaire à la tangente M′T′ (271) : donc

$$\sum al' = 0; \tag{18}$$

et, par conséquent,

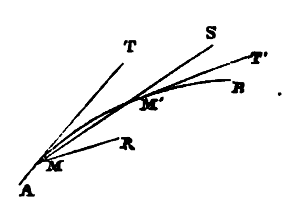
$$\sum a(l + dl) = 0.$$

Or, $l + dl$, $m + dm$, $n + dn$ sont les cosinus directifs de la binormale M′N′; a, b, c sont les cosinus directifs de la tangente MT; donc, etc.

Plan osculateur.

272. Le plan osculateur à une courbe AB, en un point M, est la limite vers laquelle tend le plan passant par la tangente MT et la sécante MM′S, lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment du point M. On peut le regarder

(*) La variable indépendante, qui peut être quelconque, est, ordinairement, l'arc AM $= s$.



aussi comme la limite du plan TMR, parallèle à la tangente M'T' : en effet, l'angle SMR est infiniment petit; donc les deux faces TMS, TMR tendent à se confondre.

274. *Équation du plan osculateur.* — La perpendiculaire au plan TMR est, à la limite, la *binormale;* donc l'équation du plan osculateur est

$$l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)=0. \tag{19}$$

Normale principale.

275. Cette droite est la *normale située dans le plan osculateur.* Or, *toute normale est contenue dans le plan normal;* donc la normale principale est représentée par le système des équations

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0, \tag{15}$$
$$l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)=0; \tag{19}$$

ou par les proportions

$$\frac{X-x}{cm-bn}=\frac{Y-y}{an-cl}=\frac{Z-z}{bl-am}. \tag{20}$$

276. *Remarques.* — I. En négligeant un facteur commun, on peut, en vertu des formules (17), remplacer le *conséquent* $cm-bn$ par

$$c(ca'-ac')-b(ab'-ba')=(b^2+c^2)a'-(bb'+cc')a$$
$$=(a^2+b^2+c^2)a'-(aa'+bb'+cc')a=a'.$$

Ainsi, les équations de la normale principale sont, si l'on veut,

$$\frac{X-x}{a'}=\frac{Y-y}{b'}=\frac{Z-z}{c'}. \tag{21}$$

II. Si f, g, h sont les cosinus directifs de cette droite, on a, par les proportions (20),

$$\frac{f}{cm - bn} = \frac{g}{an - cl} = \frac{h}{bl - am}; \qquad (22)$$

puis, par la formule (16) et les proportions (21) :

$$\frac{f}{a'} = \frac{g}{b'} = \frac{h}{c'} = \frac{ds}{\varepsilon}. \qquad (23)$$

III. Les binômes

$$cm - bn, \quad an - cl, \quad bl - am$$

sont, non-seulement proportionnels aux cosinus f, g, h, mais *ils sont égaux à ces cosinus*, pris avec leurs signes ou avec des signes contraires.

En effet, par la transformation connue (270) :

$$(cm - bn)^2 + (an - cl)^2 + (bl - am)^2$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (al + bm + cn)^2 = 1;$$

ainsi

$$\frac{f}{cm - bn} = \frac{g}{an - cl} = \frac{h}{bl - am} = \pm 1.$$

IV. Si l'on convient de prendre le signe +, on a donc

$$f = cm - bn, \quad g = an - cl, \quad h = bl - am \text{ (*)}. \qquad (24)$$

V. La *tangente*, la *binormale* et la *normale principale* sont des droites perpendiculaires deux à deux. Elles doivent, en conséquence, satisfaire aux conditions ordinairement exprimées par

$$aa' + bb' + cc' = 0, \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \quad a''a + b''b + c''c = 0.$$

(*) De même :

$$a = gn - hm, \quad b = hl - fn, \quad c = fm - gl;$$
$$l = bh - cg, \quad m = cf - ah, \quad n = ag - bf.$$

(*Théorie analytique des lignes à double courbure*, p. 13.)

En effet :

1° $$\sum al = \frac{1}{\sin V} \sum a\,(bc' - bc') = 0;$$

2° $$\sum af = \sum a\,(cm - bn) = 0;$$

3° $$\sum lf = \sum l\,(cm - bn) = 0.$$

Courbure.

277. La définition adoptée pour les courbes planes (**208**), donne

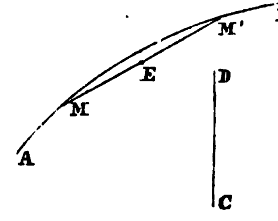
$$courbure = \lim \frac{\omega}{\Delta s} = \frac{\varepsilon}{ds} = \frac{1}{R}:$$

R est le *rayon de courbure.*

Cercle osculateur.

278. Le cercle osculateur à une courbe AB, en un point M, est la limite des cercles qui, tangents en M à AB, passent par un point M′ voisin de M. Le cercle osculateur, évidemment situé dans le plan osculateur, serait déterminé si l'on en connaissait l'*axe*.

279. *Axe du cercle osculateur.* — Si l'on considère le cercle quelconque dont il vient d'être question, l'axe CD de ce cercle est l'intersection du plan N, normal en M, avec le plan P, perpendiculaire au milieu E de MM′. On peut démontrer, comme il suit, que l'axe CD se confond, à la limite, avec l'intersection L des plans N, N′, normaux en M, M′.



L'équation du plan N étant

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0, \tag{15}$$

l'équation du plan N' sera

$$\sum(a+\Delta a)(X-x-\Delta x)=0.$$

Conséquemment, l'intersection L est représentée par

$$\left.\begin{aligned}&\sum a(X-x)=0,\\&\sum\frac{\Delta a}{\Delta s}(X-x)=\sum(a+\Delta a)\frac{\Delta x}{\Delta s}.\end{aligned}\right\}\tag{L}$$

A la limite, cette seconde équation devient

$$\sum a'(X-x)=1. \tag{25}$$

D'autre part, l'équation du plan P est

$$\sum\left(X-x-\frac{1}{2}\Delta x\right)\frac{\Delta x}{\Delta s}=0;$$

ou

$$\sum(X-x)\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{1}{2}\sum\frac{(\Delta x)^2}{\Delta s}; \tag{P}$$

en sorte que l'axe CD est représenté par cette équation, jointe à

$$\sum a(X-x)=0. \tag{15}$$

Si l'on prend s pour variable indépendante, on a

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{dx}{ds}+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\alpha\right)(\Delta s)=a+\frac{1}{2}(a'+\alpha)(\Delta s);$$

donc l'équation (P) devient

$$\sum(X-x)\left[a+\frac{1}{2}(a'+\alpha)\Delta s\right]=\frac{1}{2}\sum\frac{(\Delta x)^2}{\Delta s}.$$

On peut donc prendre, comme seconde équation de CD :

$$\sum (a' + \alpha)(X - x) = \sum \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta s)^2}.$$

Or, pour $\Delta s = 0$, celle-ci ne diffère pas de l'équation (25).

280. *Remarques.* — I. L'équation (25) est la dérivée de l'équation (15), quelle que soit la variable indépendante.

II. L'équation (25) représente un plan *perpendiculaire au plan normal et au plan osculateur*. En effet (**275**) :

$$\sum aa' = 0,$$

$$\sum (bc' - cb')\, a' = 0.$$

Le plan (25) est donc *perpendiculaire à la normale principale.*

281. *Centre et rayon du cercle osculateur.* — Le centre est déterminé par les équations de l'axe :

$$\sum a\,(X - x) = 0, \tag{15}$$

$$\sum a'\,(X - x) = 1, \tag{25}$$

jointes à l'équation du plan osculateur :

$$\sum l\,(X - x) = 0. \tag{19}$$

Au lieu de résoudre ces équations, par rapport à X, Y, Z, il vaut mieux en conclure le rayon ρ du cercle osculateur. On aurait

$$\rho^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2;$$

mais, comme ce rayon est dirigé suivant la *normale principale,* on a aussi

$$X - x = \rho f, \quad Y - y = \rho g, \quad Z - z = \rho h;$$

c'est-à-dire

$$X - x = \rho R a', \quad Y - y = \rho R b', \quad Z - z = \rho R c'. \quad (26)$$

Substituant dans l'équation (25), on trouve

$$\rho R (a'^2 + b'^2 + c'^2) = 1;$$

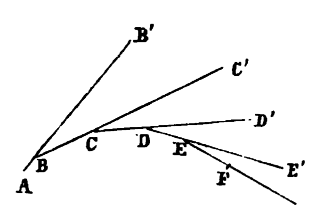
d'où

$$\rho = R. \quad (27)$$

Ainsi, *pour les courbes à double courbure, comme pour les courbes planes, le cercle osculateur est égal au cercle de courbure.*

Angle et rayon de torsion.

282. Soit une ligne brisée ABCD ..., dont trois éléments consécutifs ne soient pas dans un même plan. Si on les prolonge dans le même sens, on forme une *surface polyédrale, développable.* Par des rotations ou des *torsions* successives, effectuées autour de DE, autour de CD, etc., on en peut faire le *développement*, et trouver la *transformée plane* L' de la ligne donnée L. *Les lignes* L, L' *ont leurs éléments respectivement égaux.* De plus, *les angles de contingence correspondants sont égaux* (*). Quant aux angles formés par les plans B'CE', C'CD', D'DE', ... on leur donne le nom d'*angles de torsion.* Ces propriétés et ces dénominations subsistent si la ligne L est remplacée par une courbe à double courbure : pour une pareille ligne, *l'angle de torsion est celui*



(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, seconde partie, p. 5.

qui est formé par deux plans osculateurs consécutifs, ou par deux binormales consécutives.

D'après la formule générale (B'), on a, en désignant par η *l'angle de torsion,*

$$\eta^2 = dl^2 + dm^2 + dn^2. \qquad (28)$$

283. *Rayon de torsion.* — Si l'on divise η^2 par ds^2, le quotient a la forme $\frac{1}{r^2}$: r est appelé *rayon de torsion,* par analogie avec le *rayon de courbure.* L'équation précédente peut donc être remplacée par celle-ci :

$$\frac{1}{r^2} = l'^2 + m'^2 + n'^2. \qquad (29)$$

Formules de Frenet.

284. Reprenons les proportions

$$\frac{f}{a'} = \frac{g}{b'} = \frac{h}{c'}. \qquad (25)$$

Pour les démontrer directement, de la manière la plus simple, il suffirait d'avoir égard aux remarques suivantes :

1° La *normale principale,* étant perpendiculaire à la *tangente* et à la *binormale,* les cosinus f, g, h remplissent les conditions (**276**, *Rem.,* V) :

$$\sum af = 0, \quad \sum lf = 0. \qquad (30)$$

2° Les dérivées a', b', c' satisfont à la relation évidente

$$\sum aa' = 0$$

et à l'équation (**271**)

$$\sum la' = 0.$$

Il résulte, en effet, de ces deux systèmes d'équations

homogènes, que les premières inconnues sont proportionnelles aux secondes.

285. De même, les dérivées l, m, n satisfont aux équations

$$\sum al' = 0, \qquad (18)$$

$$\sum ll' = 0.$$

Celles-ci ne diffèrent, des équations (30), que par le changement de l', m', n' en f, g, h; donc

$$\frac{f}{l'} = \frac{g}{m'} = \frac{h}{n'}. \qquad (31)$$

Ainsi déjà :

Les cosinus directifs de la normale principale sont proportionnels, soit aux dérivées des cosinus directifs de la tangente, soit aux dérivées des cosinus directifs de la binormale.

286. D'après les formules (16), (27) et (29), les rapports (23) et (31) sont égaux, respectivement, à $\pm\rho$, $\pm r$. Nous conviendrons d'adopter le signe + pour le premier rapport, et le signe — pour le second; savoir :

$$\left.\begin{aligned} \frac{f}{a'} &= \frac{g}{b'} = \frac{h}{c'} = \rho, \\ \frac{f}{l'} &= \frac{g}{m'} = \frac{h}{n'} = -r. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

On conclut, de ces égalités :

$$\frac{l'}{a'} = \frac{m'}{b'} = \frac{n'}{c'} = -\frac{\rho}{r}; \qquad (33)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\frac{dl}{da} = \frac{dm}{db} = \frac{dn}{dc} = -\frac{\eta}{\varepsilon}. \qquad (34)$$

Les formules (32), (33), (34), aussi simples qu'importantes, sont dues à M. Frenet, ancien Professeur à la Faculté des sciences, de Lyon (*).

Rayon de torsion. — Suite.

287. La formule (29) donne le rayon de torsion par les dérivées des cosinus l, m, n. On peut, comme il suit, exprimer ce rayon, au moyen des cosinus a, b, c et de leurs dérivées.

De l'équation (**272**)

$$\sum a'l = 0,$$

on conclut

$$\sum a'l' = -\sum a''l.$$

Mais (**271**, **277**, **281**) :

$$\frac{l}{bc'-cb'} = \frac{m}{ca'-ac'} = \frac{n}{ab'-ba'} = \rho;$$

donc

$$\sum a'l' = -\rho \sum (bc'-cb')\,a'',$$

ou

$$\sum a'l' = -\rho \sum (ab'-ba')\,c''.$$

D'un autre côté :

$$\frac{a'}{f} = \frac{b'}{g} = \frac{c'}{h} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{l'}{f} = \frac{m'}{g} = \frac{n'}{h} = -\frac{1}{r}; \qquad (32)$$

donc

$$\sum a'l' = -\frac{1}{\rho r}.$$

(*) Elles sont souvent, mais à tort, attribuées à M. Serret.

Égalant ces deux valeurs d'une même somme, on trouve

$$\frac{1}{r} = \rho^2 \sum (ab' - ba') c'',$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{\Sigma (ab' - ba') c''}{a'^2 + b'^2 + c'^2}. \qquad (35)$$

288. *Remarques.* — I. Cette valeur de $\frac{1}{r}$ est *rationnelle,* tandis que celle qui est donnée par l'équation (29) est irrationnelle.

II. Dans les calculs précédents, entrent, de la même manière, les quantités a, b, c, a', ... et les quantités l, m, n, l' ... Conséquemment,

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\Sigma (lm' - ml') n''}{l'^2 + m'^2 + n'^2} \text{ (*)}. \qquad (36)$$

Surface polaire.

289. Un point quelconque P, pris sur l'axe CD du cercle osculateur, est également distant de tous les points appartenant à la circonférence de ce cercle. Le point P joue donc, par rapport à cette ligne, le rôle de centre ou de *pôle :* au moyen d'un fil dont l'extrémité fixe serait en P, on peut décrire la circonférence. Pour cette raison, l'axe CD est souvent appelé *droite polaire.*

290. La *surface polaire,* relativement à une courbe AB, *est le lieu des droites polaires de la courbe.* Chacune des génératrices étant l'intersection de deux plans normaux consécutifs (279), *la surface polaire est développable* (282).

291. *Équation de la surface polaire.* — Pour la trouver, il suffit, dans chaque cas particulier, d'éliminer la variable indépendante entre les équations (15), (25) de la droite polaire.

(*) *Théorie analytique des lignes à double courbure*, p. 17.

Application des formules précédentes.

292. Nous prendrons pour exemple l'*hélice* dont les équations sont

$$x = \cos z, \tag{1}$$

$$y = \sin z. \tag{2}$$

Il en résulte

$$dx = -\sin z dz, \quad dy = \cos z dz;$$

$$ds^2 = 2dz^2, \quad ds = \sqrt{2} dz.$$

293. *Angles de la tangente avec les axes.* — Ils sont déterminés (**268**) par les formules

$$\left.\begin{array}{c} \cos\alpha = a = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin z, \quad \cos\beta = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos z, \\ \cos\gamma = c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

294. *Remarque.* — D'après la valeur de $\cos\gamma$, *la tangente fait, avec les génératrices du cylindre, un angle de* 45°.

295. *Plan normal.* — Il a pour équation (**269**)

$$-(X - \cos z)\sin z + (Y - y)\sin z + Z - z = 0,$$

ou

$$-X\sin z + Y\cos z + Z - z = 0. \tag{4}$$

296. *Angle de contingence.* — On tire, des formules (3), en prenant z pour variable indépendante :

$$da = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos z dz, \quad db = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin z dz, \quad dc = 0; \tag{5}$$

donc (**270**)

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} dz. \tag{6}$$

287. *Binormale.* — Des formules (3) et (5), on déduit

$$bc' - cb' = \frac{1}{2}\sin z, \quad ca' - ac' = -\frac{1}{2}\cos z, \quad ab' - ba' = \frac{1}{2};$$

et, par conséquent (**271**) :

$$\frac{l}{\frac{1}{2}\sin z} = \frac{m}{-\frac{1}{2}\cos z} = \frac{n}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \tag{7}$$

puis

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin z, \quad m = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos z, \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(*). \tag{8}$$

288. *Remarque.* — La comparaison des formules (3), (8) donne

$$l = -a, \quad m = -b, \quad n = c. \tag{9}$$

Il résulte, de ces égalités, que l'*angle droit formé par la tangente et la binormale a, pour bissectrice, la génératrice du cylindre, passant au point* M.

289. *Normale principale.* — A cause des valeurs de da, db, dc, on a (**276**)

$$\frac{f}{\cos z} = \frac{g}{\sin z} = \frac{h}{0}. \tag{10}$$

Ces équations exigent que

$$h = 0, \quad f = \pm\cos z, \quad g = \pm\sin z. \tag{11}$$

Par conséquent, *la normale principale coïncide avec la perpendiculaire abaissée, du point* M, *sur l'axe du cylindre.* Cette direction est celle du rayon du cercle osculateur.

(*) Ces valeurs, qui ne sont pas affectées du signe ±, se rapportent au *segment indéfini* de la binormale, situé *au-dessus* du plan *xy*. Il en est de même pour les valeurs de *a*, *b*, *c*, relativement à la tangente (**282**).

300. *Axe du cercle osculateur.* — Il est déterminé (280) par les équations

$$-X\sin z + Y\cos z + Z - z = 0, \qquad (11)$$

$$X\cos z + Y\sin z + 1 = 0; \qquad (12)$$

dont la seconde est la dérivée de la première.

301. *Rayon du cercle osculateur.* — Nous venons de trouver

$$ds = \sqrt{2}\,dz, \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}dz;$$

donc

$$\rho = \frac{ds}{\varepsilon} = 2. \qquad (13)$$

Ainsi, le rayon du cercle osculateur est constant : il est égal au double du rayon du cylindre. Conséquemment, *le lieu des centres des cercles osculateurs de l'hélice est une hélice égale à la première;* elle est symétrique de celle-ci, relativement à l'axe du cylindre.

302. *Angle et rayon de torsion.* — D'après les relations (8),

$$\eta = \varepsilon;$$

puis

$$r = \rho = 2. \qquad (14)$$

Donc, *dans l'hélice, la torsion est constante, et égale à la courbure.*

303. *Angle de deux normales principales consécutives.* — Si on le désigne par ω, on a

$$\omega^2 = df^2 + dg^2 + dh^2;$$

et, par les formules (11) :

$$\omega^2 = dz^2.$$

Or,
$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2} dz^2, \quad \eta^2 = \frac{1}{2} dz^2;$$
donc
$$\omega^2 = \varepsilon^2 + \eta^2.$$

Cette relation remarquable, entre les angles infiniment petits ε, η, ω, subsiste pour toute courbe à double courbure : elle constitue le *théorème de Lancret* (*).

304. *Surface polaire.* — Si l'on écrit ainsi les équations (4), (12) :
$$X \sin z - Y \cos z = Z - z, \qquad (15)$$
$$X \cos z + Y \sin z = -1, \qquad (16)$$

on en conclut, en faisant la somme des carrés,
$$X^2 + Y^2 = (Z - z)^2 + 1,$$
ou
$$z = Z \mp \sqrt{X^2 + Y^2 - 1}.$$

L'équation (16) devient donc
$$X \cos\left(Z \mp \sqrt{X^2+Y^2-1}\right) + Y \sin\left(Z \pm \sqrt{X^2+Y^2-1}\right) + 1 = 0.$$

Celle-ci représente un *héliçoïde développable* (**). L'*arête de rebroussement,* de cette surface, est l'hélice considérée plus haut (**301**).

305. *Lieu des tangentes à l'hélice.* — Ce lieu est, par définition, un *héliçoïde développable.* Il est symétrique du précédent, relativement à l'axe du cylindre.

306. *Lieu des binormales.* — Les équations
$$\frac{X - x}{l} = \frac{Y - y}{m} = \frac{Z - z}{n}$$

(*) *Théorie analytique des lignes à double courbure,* p. 15.
(**) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive,* seconde partie, p. 90.

deviennent, dans le cas actuel :

$$X - \cos z = (Z - z)\sin z, \quad Y - \sin z = -(Z - z)\cos z.$$

On conclut, de celles-ci :

$$X \sin z - Y \cos z = Z - z, \quad X \cos z + Y \sin z = 1;$$

puis, par l'élimination de z,

$$X\cos\left(Z \mp \sqrt{X^2+Y^2-1}\right) + Y\sin\left(Z \mp \sqrt{X^2+Y^2-1}\right) - 1 = 0;$$

équation d'un ***héliçoïde gauche, à cône directeur.***

207. ***Lieu des normales principales.*** — Un calcul analogue au précédent, mais plus simple, conduit à l'équation

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} Z.$$

Celle-ci représente un ***héliçoïde gauche, à plan directeur*** (*). Ainsi, ***l'hélice est l'intersection d'un cylindre de révolution et de l'héliçoïde gauche, lieu des normales principales.***

Exercices.

I. Un point parcourt une circonférence, pendant que celle-ci tourne autour de l'un de ses diamètres, supposé fixe. La *vitesse angulaire* du point est égale à la *vitesse de rotation* de la circonférence. Trouver : 1° les équations de la trajectoire; 2° l'équation du plan osculateur de cette ligne; 3° l'expression du rayon de courbure, etc.

II. Un cylindre de révolution, dont le rayon est R, est coupé par une sphère qui a son centre sur la surface du

(*) Des équations (1), (2), on conclut

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} z, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

cylindre, et dont le rayon est 2R. Appliquer, à la courbe d'intersection, les formules relatives à la tangente, au plan normal, au plan osculateur, etc.

III. Appliquer les mêmes formules : 1° à la courbe représentée par

$$x = z\cos\frac{a}{z}, \quad y = z\sin\frac{a}{z};$$

2° à l'*hélice conique*, dont les équations sont

$$x^2 + y^2 = m^2 z^2, \quad u = ae^{\omega}.$$

3° à l'*hélice caténoïdique*, représentée par

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t\sqrt{2}.$$

IV. Théorème. — *Si, sur une sphère dont le rayon est pris pour unité, on trace une courbe quelconque, on a, entre les coordonnées* x, y, z *de tout point de cette ligne, la relation*

$$\sum[(yz' - zy')x'']^2 = \left[\sum x'^2\right]\left[\sum x''^2\right] - \left[\sum x'^2\right]^3 - \left[\sum x'x''\right]^2 (*).$$

V. Théorème. — *La distance de deux tangentes infiniment voisines est donnée par la formule*

$$\delta = \frac{ds^3}{12r\rho}. \qquad \text{(O. Bonnet.)}$$

VI. Théorème. — *La distance comprise entre un point d'une courbe et le plan osculateur au point infiniment voisin est double de la distance* δ *des tangentes.* (O. Bonnet.)

VII. Théorème. — *Soient* $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}$ *les courbures des projections d'une courbe* L, *sur trois plans rectangulaires.*

(*) Les accents désignent les dérivées par rapport à une variable indépendante quelconque.

Soient encore α, β, γ les angles formés, avec les axes, par la tangente à L. On a

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\sin^6 \alpha}{A^2} + \frac{\sin^6 \beta}{B^2} + \frac{\sin^6 \gamma}{C^2};$$

et, si $\gamma = \frac{\pi}{2}$:

$$\rho = A + B.$$

CHAPITRE XX.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SURFACES.

Plan tangent.

308. On a vu (**265**) que

$$F\,(x, y, z) = 0, \tag{1}$$
$$F_1\,(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

étant les équations de deux surfaces S, S_1, la tangente en un point quelconque M de l'intersection est déterminée par

$$(X - x)\frac{dF}{dx} + (Y - y)\frac{dF}{dy} + (Z - z)\frac{dF}{dz} = 0, \tag{3}$$

$$(X - x)\frac{dF_1}{dx} + (Y - y)\frac{dF_1}{dy} + (Z - z)\frac{dF_1}{dz} = 0. \tag{4}$$

L'équation (3) représente un plan dont la position dépend seulement de la surface S et des coordonnées (x, y, z) de M. Si, par ce point M, on faisait passer une nouvelle surface Σ, la tangente à la courbe suivant laquelle cette troisième surface couperait S, serait contenue dans le plan (3). On a donc ce théorème, pris quelquefois comme

définition : *Les tangentes en un point* M *d'une surface* S, *à toutes les courbes menées, de ce point, sur la surface, sont situées dans un même plan, appelé plan tangent* (*). Ainsi, les plans (3), (4) sont tangents, respectivement, aux surfaces S, S_1.

209. *Remarque. — La tangente, en un point de la courbe suivant laquelle se coupent deux surfaces, est l'intersection des deux plans tangents en ce point.*

210. Soient *p, q* les *dérivées partielles* de z, tirées de l'équation (1). On a (**55**)

$$p=\frac{dz}{dx}=-\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dz}\right)},\quad q=\frac{dz}{dy}=-\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dz}\right)};$$

d'où

$$\frac{dF}{dx}=-p\frac{dF}{dz},\quad \frac{dF}{dy}=-q\frac{dF}{dz}.$$

La substitution de ces valeurs, dans l'équation (3), transforme celle-ci en

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y). \qquad (5)$$

Cette *forme particulière de l'équation du plan tangent* est souvent employée.

211. *Remarque.* — Si la surface S est algébrique, on peut, au moyen du *Théorème des fonctions homogènes* (**100**), simplifier l'équation du plan tangent, comme on simplifie l'équation de la tangente à une courbe plane (**170**).

212. Exemple. — Si la surface S est l'ellipsoïde représenté par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

(*) Voir, pour cette question, le *Traité élémentaire de Géométrie descriptive.*

l'équation (3) devient

$$\frac{x}{a^2}X + \frac{y}{b^2}Y + \frac{z}{c^2}Z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2};$$

ou, plus simplement,

$$\frac{x}{a^2}X + \frac{y}{b^2}Y + \frac{z}{c^2}Z = 1.$$

313. *Remarque.* — On conclut, de cette équation, que la distance d, de l'origine au plan tangent, est donnée par la formule

$$d^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}};$$

ou, sous une forme plus symétrique :

$$\frac{1}{d^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \text{ (*)}.$$

Normale.

314. La droite menée par le point de contact, perpendiculairement au plan tangent, c'est-à-dire la *normale* à la surface, a pour équations :

$$\frac{X - x}{\frac{dF}{dx}} = \frac{Y - y}{\frac{dF}{dy}} = \frac{Z - z}{\frac{dF}{dz}}. \qquad (6)$$

Si l'équation du plan tangent est mise sous la forme (5), les équations de la normale deviennent

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0. \qquad (7)$$

(*) Nous avons fait usage de celle-ci (265).

815. *Angles de la normale avec les axes.* — En les désignant par λ, μ, ν, on a

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{dF}{dx}} = \frac{\cos\mu}{\frac{dF}{dy}} = \frac{\cos\nu}{\frac{dF}{dz}} = \pm\frac{1}{V}: \tag{8}$$

$$V^2 = \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2. \tag{9}$$

L'emploi des dérivées partielles p, q conduit à des formules plus commodes que celles-ci, quoique moins symétriques. En effet, d'après les équations (7) :

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\mu = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Cônes et cylindres circonscrits.

816. *Cône circonscrit.* — Reprenons les équations

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dF}{dx}(X - x) + \frac{dF}{dy}(Y - y) + \frac{dF}{dz}(Z - z) = 0. \tag{5}$$

Si le plan tangent doit passer par un point (a, b, c), non situé sur la surface S, on a l'*équation de condition :*

$$\frac{dF}{dx}(a - x) + \frac{dF}{dy}(b - y) + \frac{dF}{dz}(c - z) = 0, \tag{11}$$

à laquelle doivent satisfaire les coordonnées des points de contact de tous les plans tangents qui répondent à la question : le lieu de ces points est une *courbe de contact,* repré-

sentée par les équations (1), (11). Cette ligne peut être prise comme *directrice* d'un cône C ayant pour sommet le point (a, b, c). Pour trouver l'équation de C, il suffit d'éliminer x, y, z entre les équations (1), (11) et

$$\frac{X-x}{a-x}=\frac{Y-y}{b-y}=\frac{Z-z}{c-z}:$$

celles-ci représentent une *génératrice* quelconque.

217. *Remarque.* — *Le cône* C *est circonscrit à* S; c'est-à-dire que ces deux surfaces ont même plan tangent, au point (x, y, z). En effet, le plan tangent en ce point, à S, contient la génératrice de C et la tangente à la directrice.

218. *Cylindre circonscrit.* — Au lieu de faire passer le plan tangent par un point donné, on peut le supposer parallèle à une droite donnée, dont les équations seraient

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

La condition (11) est alors remplacée par

$$a\frac{dF}{dx}+b\frac{dF}{dy}+c\frac{dF}{dz}=0. \tag{12}$$

L'ensemble des équations (1), (12) représente la courbe de contact d'un *cylindre circonscrit* à la surface S. Pour trouver l'équation de ce cylindre, on prend les équations d'une génératrice :

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}; \tag{13}$$

puis on élimine x, y, z entre les équations (1), (12), (13).

Application aux surfaces du second degré.

319. Considérons seulement le cas des *surfaces à centre*, et rapportons S à un système de diamètres conjugués dont l'un passe par le sommet du cône donné. Soit alors

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H \qquad (14)$$

l'équation de S. Le plan tangent est représenté par

$$(X - x)Px + (Y - y)P'y + (Z - z)P''z = 0.$$

Les coordonnées du point donné sont $X = a$, $Y = 0$, $Z = 0$; donc l'équation (11) devient

$$(a - x)Px - P'y^2 - P''z^2 = 0. \qquad (15)$$

Ajoutant membre à membre, on trouve,

$$Pax = H. \qquad (16)$$

Ainsi, *la courbe de contact est dans un plan parallèle au plan conjugué du diamètre qui passe par le sommet du cône.*

320. Lorsque a devient infini, l'équation (16) se réduit à $x = 0$; et l'on a cet autre théorème : *la courbe de contact d'un cylindre et d'une surface du second degré est dans le plan conjugué à la direction des génératrices.*

CHAPITRE XXI.

DES SURFACES ENVELOPPES.

221. Les considérations employées à l'occasion des *courbes enveloppes* (**220**) prouvent que, si l'on élimine a entre les équations

$$F(x, y, z, a) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dF}{da} = 0, \tag{2}$$

l'équation résultante,

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

représente *le lieu des intersections successives des surfaces* (1). Ce lieu est l'*enveloppe* de ces surfaces; et chacune de celles-ci est une *enveloppée*.

222. Théorème. — *L'enveloppe, et chacune des enveloppées, se touchent en tous les points de leur ligne commune* (*).

1° Les quantités p, q, qui déterminent le plan tangent en un point de l'enveloppée, sont données par les équations

$$\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz} = 0. \tag{4}$$

2° Pour trouver la direction du plan tangent en un point de l'enveloppe, on devrait former d'abord l'équation (3); mais il revient au même de différencier l'équation (1), en y regardant a comme une fonction de x, y, z, donnée par l'équation (2). On a ainsi

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz} + \frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx} + p\frac{da}{dz}\right) = 0, \\ &\frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz} + \frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dy} + q\frac{da}{dz}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(*) Cette ligne a été appelée, par Monge, *caractéristique de l'enveloppe*.

A cause de $\frac{dF}{da} = 0$, ces équations (5) ne diffèrent pas des équations (4); donc les valeurs de p, q, tirées de celles-ci, satisfont à celles-là.

222. *Cas de deux paramètres.* — Si l'on élimine a, b entre

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{db} = 0, \tag{7}$$

on trouve l'équation

$$\Psi(x, y, z) = 0 \tag{8}$$

d'une *surface enveloppe, qui ne touche chaque enveloppée qu'en un ou plusieurs points.*

Il est clair, en effet, que, pour des valeurs données de a, b, les équations (6), (7) n'admettent qu'un nombre fini de solutions. Quant à la propriété du plan tangent commun, elle se démontre avec la même facilité que dans le cas traité ci-dessus.

Exercices.

I. Par un point M, pris sur un ellipsoïde, on mène un plan perpendiculaire au diamètre passant en M. Quelle est l'enveloppe du plan, si le point M décrit une circonférence?

II. Enveloppe des plans dont la somme des carrés des distances à des points donnés est constante.

III. Enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une circonférence.

IV. Un plan variable coupe un angle trièdre, de manière à déterminer un tétraèdre dont le volume est constant. Trouver l'équation de la surface enveloppe. Cette surface est-elle développable?

V. α, β, γ, p étant quatre paramètres, satisfaisant aux conditions

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

$$\frac{\alpha^2}{p^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{p^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{p^2 - c^2} = 0,$$

trouver l'enveloppe du plan représenté par

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = p.$$

Résultat :

$$\sum \frac{a^2 x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} = 0 \text{ (*)}.$$

VI. Trouver l'équation de la surface enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt l'ellipse représentée par

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2, \quad z = 0.$$

Résultat :

$$(AB - 9C)^2 = 4(A^2 + 3B)(B^2 + 3AC),$$

en supposant

$$A = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2,$$
$$B = a^2 y^2 + b^2 x^2 + (a^2 + b^2)(z^2 - c^2) + a^2 b^2,$$
$$C = a^2 b^2 (c^2 - z^2) :$$

c est le rayon de la sphère donnée (**).

VII. Trouver l'enveloppe d'un cylindre de révolution, dont l'axe reste tangent à une courbe donnée.

(*) Cette équation représente la *surface des ondes*. (Voyez p. 461.)

(**) Ces formules résultent de celles qui représentent la toroïde ([illegible]).

CALCUL INTÉGRAL.

I.

INTÉGRALES SIMPLES.

CHAPITRE I.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Définitions et notations.

1. Si une fonction $F(x)$ a pour différentielle $f(x)\,dx$, on dit que $F(x)$ est l'*intégrale* de $f(x)\,dx$. On représente l'intégrale par le signe $\int$, que l'on énonce *intégrale de* ou *somme de*; ainsi, $F(x) = \int f(x)\,dx$. Cette égalité a la même signification que $d.F(x) = f(x)\,dx$; en sorte que *les signes* $\int$ *et* d *se détruisent mutuellement.*

Constante arbitraire.

2. Si, par un procédé quelconque, on a trouvé une fonction $\varphi(x)$ dont la différentielle soit $f(x)\,dx$, et que l'on représente par $F(x)$ ou $\int f(x)\,dx$ *la fonction la plus générale* qui jouisse de la même propriété, on a

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \varphi(x) + C, \tag{1}$$

C étant une *constante arbitraire.* En effet, on a vu, dans

l'ALGÈBRE, que *deux fonctions qui ont même dérivée* (ou *même différentielle*) *ne peuvent différer que par une constante.* Quelquefois, on donne à la fonction $\varphi(x)$ le nom d'*intégrale particulière* : alors $F(x)$ est l'*intégrale générale.*

Intégrales indéfinies ou définies.

3. Dans l'égalité (1), la constante C est ordinairement déterminée par la condition que l'intégrale s'annule pour une valeur a de x. Autrement dit, on suppose $0 = \varphi(a) + C$; d'où $F(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$. Pour indiquer, au moyen du signe $\int$, que l'on considère cette intégrale de $f(x)\,dx$, on écrit

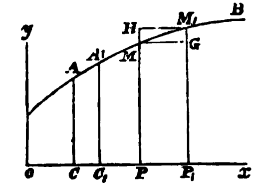
$$\int_a^x f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a). \qquad (2)$$

Si l'on attribue à x une nouvelle valeur particulière b, l'égalité (2) devient

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) : \qquad (3)$$

le premier membre, qui est *indépendant de* x, est ce qu'on appelle une *intégrale définie*; a et b en sont les *limites*. Par opposition, $\int_a^x f(x)\,dx$ est souvent désignée sous le nom d'*intégrale indéfinie.*

4. *Interprétation géométrique.* — Considérons la courbe AB dont l'équation est $y = f(x)$. L'aire déterminée par cette courbe, l'axe des abscisses, une première ordonnée AC et une ordonnée quelconque MP, est une fonction de $OP = x$: soit $\Psi(x)$ cette fonction.



Prenons $PP_1 = \Delta x$; supposons, pour fixer les idées, que l'ordonnée $y = f(x)$ soit croissante pour des valeurs suffi-

samment petites de Δx; enfin menons MG et M_1H parallèles à Ox. Il résulte, de cette construction et de l'hypothèse,

$$y\Delta x < \Delta\Psi(x) < (y + \Delta y)\Delta x,$$

ou

$$y < \frac{\Delta\Psi(x)}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Passant à la limite, on a $y = f(x) = \frac{d\Psi(x)}{dx}$. Ainsi *la fonction* $\Psi(x)$ *a pour différentielle* $f(x)\,dx$: elle est donc une intégrale de $f(x)\,dx$; et, si l'on suppose $OC = a$,

$$\Psi(x) = \text{ACMP} = \int_a^x f(x)\,dx.$$

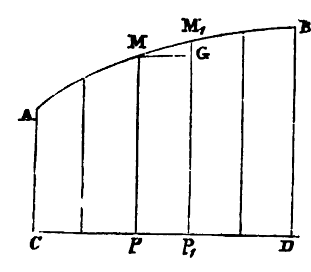
5. *Remarque.* — Si l'on comptait les aires à partir d'une ordonnée A_1C_1, on aurait

$$\Psi_1(x) = A_1C_1MP = \int_{a_1}^x f(x)\,dx,$$

et

$$\Psi(x) - \Psi_1(x) = ACA_1C_1 :$$

les deux fonctions $\Psi(x)$, $\Psi_1(x)$, *qui ont même différentielle, diffèrent seulement par une constante.* On a ainsi une seconde démonstration du théorème rappelé ci-dessus.



6. Théorème. — *Toute intégrale définie représente une limite de sommes.* L'aire ACBD est la limite de la somme des aires des rectangles tels que $MGPP_1$ (*). On a donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x,$$

pourvu que Δx diminue indéfiniment (**).

(*) *Éléments de Géométrie*, p. 169.

(**) Leibniz, l'un des inventeurs du Calcul intégral, regardait la diffé-

7. *Exemples d'intégrale indéfinie et d'intégrale définie.* — La sinusoïde a pour équation

$$y = \sin x.$$

Donc

$$\text{OMP} = \int \sin x dx = -\cos x + \text{C}.$$

L'aire doit s'annuler avec x; conséquemment $\text{C} = 1$:

$$\text{OMP} = \int_0^x \sin x dx = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x = 2\overline{mp}^2$$

(en supposant $\text{O}p = \frac{1}{2}\,\text{OP}$). Si, dans cette intégrale *indéfinie*, on suppose $x = \text{OA} = \pi$, on a

$$\text{OMAPO} = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

Intégration de $af(x)\,dx$.

8. a étant un facteur *constant*, c'est-à-dire indépendant de x, on a

$$\int af(x)\,dx = a \int f(x)\,dx + \text{C}.$$

En effet, les différentielles des deux membres sont $af(x)dx$. On peut donc, à volonté, *faire sortir un facteur constant de dessous le signe d'intégration, ou le faire entrer sous ce signe.*

Intégration d'une somme.

9. De même que

$$d(u + v - w) = du + dv - dw : \qquad (4)$$

$$\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw. \qquad (5)$$

rentielle ydx, comme une quantité *infiniment petite* (dans le sens vulgaire du mot). Dès lors, l'intégrale était une véritable *somme*. De là, l'emploi du signe $\int$.

Effectivement, si l'on différencie les deux membres, on retombe sur l'équation (4).

Ainsi, *l'intégrale de la somme ou de la différence de plusieurs différentielles est égale à la somme ou à la différence des intégrales de ces différentielles* (*).

Intégration immédiate de quelques différentielles.

10. En renversant les règles de la différenciation, on trouve les formules suivantes, déjà démontrées dans l'*Algèbre* :

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int (Ax^m + Bx^p + \cdots + Nx^s)\, dx =$$

$$\frac{A}{m+1} x^{m+1} + \frac{B}{p+1} x^{p+1} + \cdots + \frac{N}{s+1} x^{s+1} + const.,$$

$$\int \frac{dx}{x} = 1x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C,$$

etc.

11. *Remarque.* — La formule

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

est en défaut lorsque $m = -1$. Cela tient à ce que $\frac{dx}{x}$ est

(*) La constante arbitraire est toujours sous-entendue.

la différentielle de $1x$. On peut cependant déduire, de cette même formule, la valeur de $\int\frac{dx}{x}$.

En effet,

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}-1}{m+1} + C';$$

car $\frac{-1}{m+1}$ est une constante. Si l'on suppose $m=-1$, la fraction $\frac{x^{m+1}-1}{m+1}$ prend la forme $\frac{0}{0}$. D'après la règle ordinaire, la vraie valeur est $x^{m+1}1x$ (*), pourvu que $m=-1$. Donc enfin

$$\int\frac{dx}{x} = 1x + C'.$$

CHAPITRE II.

MÉTHODES D'INTÉGRATION.

Intégration par parties.

12. De

$$d(uv) = udv + vdu,$$

on tire

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

ou

$$\int udv = uv - \int v\,.\,du.$$

Cette relation constitue ce qu'on appelle *l'intégration par parties*. Elle consiste, on le voit, à *décomposer en deux facteurs la différentielle donnée, de manière que l'un d'eux soit la différentielle d'une fonction connue*. Elle donne les valeurs d'un très-grand nombre d'intégrales.

(*) On ne doit pas oublier que la dérivée de l'*exponentielle* x^{m+1}, par rapport à la *variable* m, est $x^{m+1}1x$ (ALG., 129).

13. Exemples :

I. $\int xe^x dx = \int x . e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x$;

ou plutôt

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x + C.$$

II. $\int x^2 e^x dx = \int x . xe^x dx = x.(x-1)e^x - \int (x-1)e^x dx.$

Mais

$$\int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - e^x = (x-2)e^x;$$

donc

$$\int x^2 e^x dx = x(x-1)e^x - (x-2)e^x = (x^2-2x+2)e^x + C.$$

III. Plus généralement, soit

$$y_m = \int x^m e^x dx,$$

m étant entier positif. Si l'on opérait comme dans les deux premiers exemples, on aurait

$$\int x . x^{m-1} e^x dx = xy_{m-1} - \int y_{m-1} dx;$$

relation qui donnerait lieu à un calcul compliqué. Mais comme

$$\int x^m . e^x dx = x^m e^x - m\int x^{m-1} e^x dx,$$

il s'ensuit que

$$y_m = x^m e^x - m . y_{m-1};$$

puis, par le changement de m en $m-1, m-2, m-3, \dots 1$:

$$\begin{aligned} y_{m-1} &= x^{m-1}e^x - (m-1)\, y_{m-2}, \\ y_{m-2} &= x^{m-2}e^x - (m-2)\, y_{m-3}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_2 &= x^2 e^x - y_1, \\ y_1 &= xe^x - e^x. \end{aligned}$$

Éliminant $y_{m-1}, y_{m-2}, \dots y_1$, et ajoutant la constante, on trouve

$$y_m = \left[x^m - mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - \dots \pm m(m-1)\dots 1\right]e^x + C.$$

IV. $\int 1x dx = 1x . x - \int x \frac{dx}{x} = x(1x-1) + C.$

Intégration par substitution.

14. Un changement de variable, ou la substitution de $\varphi(t)$ à x, facilite souvent l'intégration d'une différentielle donnée.

Soit, par exemple, $y = \int (ax+b)^m dx$. Si l'on suppose $ax + b = t$, ce qui donne $dx = \frac{dt}{a}$, on trouve

$$y = \frac{1}{a}\int t^m dt = \frac{t^{m+1}}{a(m+1)} + C = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + C.$$

15. *Autre application.* — Soit

$$y = \int \frac{dx}{x^2 + px + q}.$$

On a

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 + \left(q - \frac{1}{4}p^2\right).$$

1° En supposant d'abord

$$q - \frac{1}{4}p^2 > 0,$$

prenons

$$x + \frac{1}{2}p = t\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}, \quad dx = dt\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2};$$

d'où

$$y = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}} \operatorname{arc\,tg} t + C,$$

ou bien,

$$y = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + \frac{1}{2}p}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}} + C.$$

2° Si le binôme $q - \frac{1}{4}p^2$ est négatif, posons

$$x + \frac{1}{2}p = \theta, \quad q - \frac{1}{4}p^2 = -a^2.$$

Alors

$$y=\int\frac{d\theta}{\theta^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{d\theta}{\theta-a}-\int\frac{d\theta}{\theta+a}\right)=\frac{1}{2a}\mathrm{l}\frac{\theta-a}{\theta+a}+C_1.$$

Cette nouvelle formule ne diffère pas essentiellement de la précédente. En effet, celle-ci équivaut à

$$y=\frac{1}{a\sqrt{-1}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\theta}{a\sqrt{-1}}+C;$$

donc, si l'on suppose

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\theta}{a\sqrt{-1}}=\varphi\sqrt{-1},$$

on a

$$\theta=a\sqrt{-1}\operatorname{tg}(\varphi\sqrt{-1})=a\frac{e^{-\varphi}-e^{\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}},\quad \frac{\theta-a}{\theta+a}=-e^{2\varphi},$$

$$\mathrm{l}\frac{\theta-a}{\theta+a}=2\varphi+\mathrm{l}(-1).$$

Ainsi, d'une part, $y=\frac{\varphi}{a}+C$; et, de l'autre,

$$y=\frac{\varphi}{a}+\frac{\mathrm{l}(-1)}{2a}+C_1.$$

Ces deux valeurs sont identiques si l'on prend

$$C=C_1+\frac{1}{2a}\mathrm{l}(-1).$$

3° Enfin, si $q=\frac{1}{4}p^2$, on a

$$y=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2};$$

c'est-à-dire

$$y=-\frac{1}{x+\frac{1}{2}p}+C.$$

16. *Remarque.* — Une intégrale étant trouvée, on en peut déduire une infinité d'autres, plus ou moins simples : il suffit, pour cela, d'employer la formule $x = \varphi(t)$, en faisant varier la forme de la fonction φ. Mais toutes ces intégrales, différentes en apparence, sont identiques au fond.

Exercices (*).

I. Intégrer les expressions suivantes :

$$dy_0 = \frac{xdx}{\sqrt{a^4 - x^4}},\quad dy_1 = \frac{xdx}{a^4 + x^4},\quad dy_2 = \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}\ (^{**}),$$

$$dy_3 = \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}dx,\quad dy_4 = \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Résultats :

$$y_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x^2}{a^2} + C,\quad y_1 = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{a^2} + C,$$

$$y_2 = \operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}} + C,$$

$$y_3 = \sin\alpha\operatorname{arc\,tg}\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{1}{2}\cos\alpha\, l\,\frac{1 - 2x\cos\alpha + x^2}{C},$$

$$y_4 = \frac{1}{2}a^2.\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

(*) Les exercices suivants, tirés du *Recueil* de M. Frenet, peuvent être résolus, soit par des transformations très-simples, soit au moyen de l'*intégration par parties*.

(**) Si l'on fait

$$\frac{x^2 - a^2}{b^2 - x^2} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi},$$

on trouve

$$dy_2 = d\varphi;$$

donc

$$y_2 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - x^2}} + C.$$

II. Même question pour

$$dy_0 = \frac{dx}{1+e^x}, \quad dy_1 = \operatorname{tg}^2 x \,.\, dx, \quad dy_2 = \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x},$$

$$dy_3 = \cos x \cos 2x \cos 3x dx, \quad dy_4 = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} x dx,$$

$$dy_5 = \operatorname{arc\,tg} x dx, \quad dy_6 = \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arc\,tg} x dx.$$

Résultats :

$$y_0 = x - l\left(\frac{1+e^x}{c}\right), \quad y_1 = \operatorname{tg} x - x + C, \quad y_2 = -2 \cot 2x + C,$$

$$y_3 = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C,$$

$$y_4 = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C, \quad y_5 = x \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{l} \frac{C}{1+x^2},$$

$$y_6 = \left(x - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\right) \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{l} \frac{C}{1+x^2}.$$

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

17. On sait (*Alg.*, Chap. XXV) qu'une fraction rationnelle, $\frac{f(x)}{F(x)}$, est toujours décomposable en fractions simples, réductibles aux formes

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \quad \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}.$$

Par conséquent, l'intégrale de $\frac{f(x)dx}{F(x)}$ est, elle-même, réductible à

$$\int \frac{A}{x-a}dx, \int \frac{Adx}{(x-a)^n}, \int \frac{(Mx+N)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \int \frac{(Mx+N)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}.$$

18. On a immédiatement (10) :

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\,l\,(x-a) + C, \qquad (1)$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C. \qquad (2)$$

19. Soit

$$dy = \frac{(Mx+N)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

On peut décomposer ainsi le second membre :

$$\frac{M(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{(M\alpha+N)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2};$$

donc

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \\ \displaystyle\frac{1}{2}M\,l\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right] + \frac{M\alpha+N}{\beta}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-\alpha}{\beta} + C. \end{array}\right\} (3)$$

20. La même décomposition, appliquée à

$$dy = \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}dx,$$

donne

$$y = M\int \frac{(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p} + (M\alpha+N)\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}$$

$$= -\frac{M}{2(p-1)}\frac{1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-1}} + (M\alpha+N)\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}.$$

Pour réduire cette nouvelle intégrale, posons $x-\alpha=\beta z$: il vient

$$\int \frac{dx}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^p}=\frac{1}{\beta^{2p-1}}\int\frac{dz}{(1+z^2)^p}=\frac{1}{\beta^{2p-1}}Z_p.$$

Comme on ne peut écrire, immédiatement, la valeur de Z_p, on cherche à exprimer cette quantité au moyen de la fonction plus simple Z_{p-1}. C'est à quoi l'on parvient par l'un ou l'autre des procédés suivants :

1° On a, identiquement,

$$d.\frac{z}{(1+z^2)^{p-1}}=\frac{dz}{(1+z^2)^{p-1}}-2(p-1)\frac{z^2dz}{(1+z^2)^p}\,(*)$$

$$=\frac{dz}{(1+z^2)^{p-1}}-2(p-1)\frac{z^2+1-1}{(1+z^2)^p}dz\,(**)$$

$$=-(2p-3)\frac{dz}{(1+z^2)^{p-1}}+(2p-2)\frac{dz}{(1+z^2)^p};$$

donc

$$\frac{z}{(1+z^2)^{p-1}}=-(2p-3)\,Z_{p-1}+(2p-2)\,Z_p;$$

puis

$$Z_p=\frac{2p-3}{2p-2}Z_{p-1}+\frac{1}{2p-2}\frac{z}{(1+z^2)^{p-1}}. \qquad \text{(A)}$$

2° $$Z_p=\int\frac{dz}{(1+z^2)^p}=\int\frac{dz\,(1+z^2-z^2)}{(1+z^2)^p},$$

ou

$$Z_p=Z_{p-1}-\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^p}.$$

(*) Cet *artifice*, qui consiste à différencier une fonction pour établir une relation entre deux intégrales, doit être remarqué : il est fréquemment employé.

(**) Voici encore un artifice aussi utile que simple : il se réduit à retrancher et ajouter une même quantité.

L'intégration par parties donne

$$\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^p} = -\frac{1}{2}\frac{(1+z^2)^{-p+1}}{p-1}z + \frac{1}{2}\frac{1}{p-1}Z_{p-1};$$

donc

$$Z_p = Z_{p-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{(p-1)(1+z^2)^{p-1}} - \frac{1}{2(p-1)}Z_{p-1}; \text{ etc.}$$

21. Au moyen de la relation (A), on a Z_p lorsque Z_{p-1} est connu. Or,

$$Z_1 = \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg} z + C;$$

donc

$$Z_2 = \frac{1}{2}Z_1 + \frac{1}{2}\frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z + \frac{1}{2}\frac{z}{1+z^2} + C,$$

$$Z_3 = \frac{3}{4}Z_2 + \frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2}$$

$$= \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} z + \frac{3}{8}\frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2} + C;$$

et ainsi de suite. L'intégrale auxiliaire Z_p étant calculée, on a la dernière des formules cherchées :

$$\left.\begin{aligned}&\int \frac{(Mx+N)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p} = \\ &-\frac{M}{2(p-1)}\frac{1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-1}} + \frac{(M\alpha+N)Z_p}{\beta^{2p-1}}.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

22. *Autre méthode.* — Au lieu d'appliquer, plusieurs fois de suite, la formule (A), on peut former la valeur *complète* de Z_p. Il est visible que

$$Z_p = a \cdot \operatorname{arc\,tg} z + \sum_1^{p-1} a_i \frac{z}{(1+z^2)^i}, \quad \text{(B)}$$

$a, a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$ étant des coefficients inconnus.

Prenant les dérivées des deux membres, on a

$$\frac{1}{(1+z^2)^p} = \frac{a}{1+z^2} + \sum_1^{p-1} a_i \left[\frac{z}{(1+z^2)^i}\right]'. \qquad (5)$$

Or (**20**, 1°) :

$$\left[\frac{z}{(1+z^2)^{p-1}}\right]' = (2p-2)\frac{1}{(1+z^2)^p} - (2p-3)\frac{1}{(1+z^2)^{p-1}};$$

donc, par le changement de p en $i+1$:

$$\left[\frac{z}{(1+z^2)^i}\right]' = 2i\frac{1}{(1+z^2)^{i+1}} - (2i-1)\frac{1}{(1+z^2)^i}.$$

Au moyen de cette valeur, l'égalité (5) devient

$$\frac{1}{(1+z^2)^p} = \frac{a}{1+z^2} + \sum_1^{p-1} 2ia_i \frac{1}{(1+z^2)^{i+1}} - \sum_1^{p-1}(2i-1)a_i\frac{1}{(1+z^2)^i},$$

ou

$$\frac{1}{(1+z^2)^p} = (a-a_1)\frac{1}{1+z^2} + (2a_1-3a_2)\frac{1}{(1+z^2)^2} + (4a_2-5a_3)\frac{1}{(1+z^2)^3} + \cdots$$
$$+ \left[(2p-4)a_{p-2} - (2p-3)a_{p-1}\right]\frac{1}{(1+z^2)^{p-1}} + (2p-2)a_{p-1}\frac{1}{(1+z^2)^p}. \qquad (6)$$

Les deux membres doivent être identiques; donc

$$\left.\begin{aligned} a_{p-1} = \frac{1}{2p-2}, \quad a_{p-2} &= \frac{2p-3}{(2p-2)(2p-4)}, \\ a_{p-3} &= \frac{(2p-3)(2p-5)}{(2p-2)(2p-4)(2p-6)}, \ldots \\ a_1 = a &= \frac{1.3.5\ldots(2p-3)}{2.4.6\ldots(2p-2)}; \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

et, dans la formule (B), tout est connu.

23. EXEMPLE :

$$Z_5=\int\frac{dz}{(1+z^2)^5}=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\operatorname{arc\,tg} z+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{z}{1+z^2}$$
$$+\frac{5.7}{4.6.8}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\frac{7}{6.8}\frac{z}{(1+z^2)^3}+\frac{1}{8}\frac{z}{(1+z^2)^4}+\textit{const.}$$

Applications.

24. I. Soit

$$X=\int y\,dx=\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}.$$

La fraction

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+1)^2}.$$

On trouve d'abord $A=\frac{1}{4}$. Par suite,

$$\frac{4-(x^2+1)^2}{4(x+1)}=\frac{-x^4-2x^2+3}{4(x+1)}=\frac{-x^3+x^2-3x+3}{4}$$
$$=(Mx+N)(x^2+1)+M_1x+N_1;$$

puis, en identifiant :

$$M=-\frac{1}{4},\ N=\frac{1}{4},\ M+M_1=-\frac{3}{4},\ N_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\ M_1=-\frac{1}{2}.$$

Donc

$$X=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{(x-1)\,dx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\,\mathrm{l}\,(x+1)-\frac{1}{8}\,\mathrm{l}\,(x^2+1)+\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1}$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

La formule (A) donne

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}.$$

Ainsi

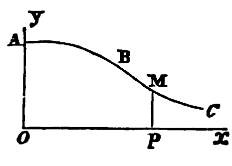
$$\int y dx = \frac{1}{4}\,\text{l}\,(x+1) - \frac{1}{8}\,\text{l}\,(x^2+1) + \frac{1}{4}\,\text{arc tg}\,x + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x^2+1}$$

$$+ \frac{1}{4}\,\text{arc tg}\,x + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x^2+1} + \text{C}$$

$$= \frac{1}{8}\,\text{l}\,\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x + \frac{1}{4}\,\frac{x+1}{x^2+1} + \text{C}.$$

25. II. Supposons que $y = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}$ soit l'équation de la courbe ABC; et comptons l'aire à partir de Oy. Alors, par la dernière formule, $0 = \frac{1}{4} + \text{C}$; donc

$$\text{AOPM} = \int_0^x y dx = \frac{1}{8}\,\text{l}\,\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x + \frac{1}{4}\,\frac{x(1-x)}{x^2+1}.$$



Si x augmente indéfiniment, le second membre tend vers $\frac{\pi-1}{4}$. Ainsi *l'aire* ACOx *est finie,* bien que l'arc AMC soit infini. En même temps,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{\pi-1}{4}.$$

26. III. *Valeur d'une autre intégrale définie.* — La relation (A) exprime que

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^p} = \frac{2p-3}{2p-2}\int \frac{dz}{(1+z^2)^{p-1}} + \frac{1}{2p-2}\,\frac{z}{(1+z^2)^{p-1}}.$$

Dans le second membre, la quantité $\frac{z}{(1+z^2)^{p-1}}$ s'annule pour $z = 0$ et pour $z = \infty$; donc

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2)^p} = \frac{2p-3}{2p-2}\int_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2)^{p-1}};$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^p} = \frac{2p-3}{2p-2} \cdot \frac{2p-5}{2p-4} \cdot \frac{2p-7}{2p-6} \cdots \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \qquad \text{(D)}$$

p étant *entier positif.*

27. Cette intégrale définie peut en donner d'autres (*). Si, par exemple, on suppose $z = \operatorname{tg}\theta$; d'où

$$dz = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-2}\theta d\theta;$$

on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-2}\theta d\theta = \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{2p-5}{2p-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2};$$

ou, en remplaçant p par $p+1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta . d\theta = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p}\frac{\pi}{2}. \qquad \text{(D)}$$

Exercices.

I. Intégrer

$$dy_0 = \frac{1-x+x^2}{(1+x+x^2)^2}dx, \quad dy_1 = \frac{dx}{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1},$$

$$dy_2 = \frac{dx}{1+x^4}, \quad dy_3 = \frac{1+x^4}{1+x^6}dx.$$

Résultats :

$$y_0 = \frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2(x+2)}{3(x^2+x+1)} + C,$$

$$y_1 = \frac{x+1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{4}\,\mathrm{l}\frac{c(x+1)}{\sqrt{x^2+1}},$$

(*) Voir la *Remarque* (26).

$$y_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \,\mathrm{l}\, \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\sqrt{2}}{1 - x^2} + \mathrm{C},$$

$$y_3 = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x(1 - x^2)}{x^4 - 4x^2 + 1} + \mathrm{C}.$$

II. Vérifier les formules suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1 - x + x^2}{(1 + x + x^2)^2}\,dx = \frac{5\pi}{9\sqrt{3}} - \frac{2}{3},$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - x + x^2}{(1 + x + x^2)^2}\,dx = \frac{10\pi}{9\sqrt{3}} - \frac{4}{3}\ (^*),$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(x + 1)^2(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}},$$

$$\int_0^\infty \frac{(1 - x)\,dx}{(1 + x)(1 + x^2)} = 0, \quad \int_0^\infty \frac{1 + x^4}{1 + x^6}\,dx = \frac{\pi}{3}.$$

(*) Il résulte, de ces deux formules, que *les intégrales définies*

$$\int_0^1 \frac{1 - x + x^2}{(1 + x + x^2)^2}\,dx, \quad \int_1^\infty \frac{1 - x + x^2}{(1 + x + x^2)^2}\,dx,$$

ont même valeur. On vérifie cette proposition en posant, dans la seconde intégrale,

$$x = \frac{1}{t}.$$

CHAPITRE IV.

INTÉGRATION DES FONCTIONS IRRATIONNELLES.

Irrationnelles monômes.

28. Il est toujours facile, par un changement de variable, de rendre rationnelle une différentielle dans laquelle les irrationnelles entrent sous forme monôme. Soit, par exemple :

$$dy = \frac{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{5}{8}} - x^{\frac{1}{6}} + 1} dx.$$

Si l'on fait $x = t^{24}$, on a

$$dy = 24 \frac{t^{16} + t^{18} - t^{20}}{t^{15} - t^{4} + 1} t^{23} dt.$$

La transformation se ferait aussi aisément si x était remplacé par $ax + b$.

Radicaux du second degré.

29. Si la différentielle donnée renferne $\sqrt{x^2 + px + q}$, on pose

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + z;$$

ce qui donne, par l'élévation au carré,

$$px + q = 2zx + z^2;$$

puis

$$x = \frac{z^2 - q}{p - 2z},$$

$$dx = -2\frac{z^2 - pz + q}{(p-2z)^2}dz, \quad x + z = -\frac{z^2 - pz + q}{p - 2z}.$$

20. Soit maintenant

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} = \frac{dz}{\frac{p}{2} - z}.$$

L'intégrale du second membre est $-\mathrm{l}\left(z - \frac{p}{2}\right) + \mathrm{C}$. Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} = -\mathrm{l}\left(z - \frac{p}{2}\right) + \mathrm{C};$$

ou, en faisant attention que le logarithme d'une constante est une constante :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} = \mathrm{l}\frac{c}{z - \frac{p}{2}}.$$

Mettant pour z sa valeur, on a donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} = \mathrm{l}\frac{c}{-\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{x^2 + px + q}}$$

$$= \mathrm{l}\frac{c\left[x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q}\right]}{q - \frac{p^2}{4}};$$

ou enfin, en changeant la constante,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} = \mathrm{l}\left[a\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q}\right)\right]. \quad (1)$$

31. En second lieu, soit

$$dy = dx\sqrt{x^2+px+q} = \frac{x^2+px+q}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx\ (^*)$$

$$= \frac{x\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx + \frac{\frac{p}{2}x+q}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx\ (^{**}).$$

De là résulte

$$y = \int x\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)dx}{\sqrt{x^2+px+q}} + \int\frac{\frac{p}{2}x+q}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2+px+q} - \int dx\sqrt{x^2+px+q}$$

$$+\frac{p}{2}\int\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)dx}{\sqrt{x^2+px+q}} + \left(q-\frac{1}{4}p^2\right)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$$

$$= x\sqrt{x^2+px+q} - y + \frac{p}{2}\sqrt{x^2+px+q}$$

$$+\left(q-\frac{1}{4}p^2\right)\mathrm{l}\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+p}\right).$$

Ainsi

$$\left.\begin{aligned}\int dx\sqrt{x^2+px+q} &= \frac{1}{2}\left(x+\frac{p}{2}\right)\sqrt{x^2+px+q}\\ &+\frac{1}{2}\left(q-\frac{1}{4}p^2\right)\mathrm{l}\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right)+C.\end{aligned}\right\}\ (2)$$

32. *Remarque.* — La dernière formule donne, comme cas particulier,

$$\int dx\sqrt{x^2-a^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C,$$

(*) Quand une différentielle contient un radical, il y a ordinairement avantage à le faire passer en dénominateur.

(**) Cette décomposition tend à rendre intégrable la première partie de dy.

et, en supposant $y = \sqrt{x^2 - a^2}$:

$$\int_a^x dx \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} xy - \frac{1}{2} a^2 \mathrm{l} \frac{x+y}{a}.$$

La *quadrature* de l'hyperbole équilatère dépend donc des logarithmes népériens. Pour cette raison, on les appelait, autrefois, *logarithmes hyperboliques*.

33. Pour rendre rationnel $\sqrt{-x^2 + px + q}$, on met d'abord le trinôme sous la forme

$$q + \frac{1}{4} p^2 - \left(x - \frac{1}{2} p\right)^2 = \beta^2 - z^2 \text{ (*)}.$$

Cette transformation donne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + px + q}} = \int \frac{dz}{\sqrt{\beta^2 - z^2}} = \arcsin \frac{z}{\beta} + \mathrm{C};$$

ou

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + px + q}} = \arcsin \frac{x - \frac{1}{2} p}{\sqrt{q + \frac{1}{4} p^2}} + \mathrm{C}. \quad (5)$$

34. De même,

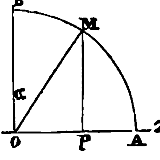
$$\int dx \sqrt{-x^2 + px + q} = \int dz \sqrt{\beta^2 - z^2}$$
$$= z\sqrt{\beta^2 - z^2} + \int \frac{z^2}{\sqrt{\beta^2 - z^2}} dz$$
$$= z\sqrt{\beta^2 - z^2} + \int \frac{z^2 - \beta^2 + \beta^2}{\sqrt{\beta^2 - z^2}} dz$$
$$= z\sqrt{\beta^2 - z^2} - \int dz \sqrt{\beta^2 - z^2} + \beta^2 \int \frac{dz}{\sqrt{\beta^2 - z^2}};$$

(*) Le trinôme doit être une différence de carrés, sans quoi le radical serait toujours imaginaire.

puis

$$\left.\begin{aligned}&\int dx\sqrt{-x^2+px+q}\\&=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}p\right)\sqrt{-x^2+px+q}\\&+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}\,\text{arc sin}\,\frac{x-\frac{1}{2}p}{\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}}+\text{C}.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

35. *Remarques.* — I. Si l'on suppose $OA=\beta$, l'intégrale $\int dz\sqrt{\beta^2-z^2}$ représente l'aire de la partie BMPO du cercle. Or



$$\begin{aligned}\text{BMPO}=\text{BOM}+\text{MOP}&=\frac{1}{2}\beta^2.\alpha+\frac{1}{2}\text{OP}.\text{PM}\\&=\frac{1}{2}\beta^2\,\text{arc sin}\,\frac{z}{\beta}+\frac{1}{2}z.\text{PM};\end{aligned}$$

donc

$$\int dz\sqrt{\beta^2-z^2}=\frac{1}{2}\beta^2\,\text{arc sin}\,\frac{z}{\beta}+\frac{1}{2}z\sqrt{\beta^2-z^2}+\text{C};$$

ce qui est exact.

II. Pour intégrer $\frac{dx}{\sqrt{x^2+q}}$, il suffit d'écrire l'identité

$$1=\frac{x+\sqrt{x^2+q}}{x+\sqrt{x^2+q}}$$

et de diviser les deux membres par $\sqrt{x^2+q}$: le second membre devient égal à la dérivée de $\text{l}\left(x+\sqrt{x^2+q}\right)$; donc

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+q}}=\text{l}\left(x+\sqrt{x^2+q}\right)+\textit{const.}$$

III. Si l'on veut rendre rationnelle une expression con-

tenant $\sqrt{a^2-x^2}$, on peut employer une des transformations suivantes :

$$\sqrt{a^2-x^2}=(a-x)z,\quad \frac{a-x}{a+x}=\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi},\quad \sqrt{a^2-x^2}=a-tx.$$

On tire : de la première,

$$x=a\frac{z^2-1}{z^2+1},\quad \sqrt{a^2-x^2}=\frac{2az}{z^2+1},\quad dx=4a\frac{zdz}{(z^2+1)^2};$$

de la deuxième,

$$x=a.\cos 2\varphi,\quad \sqrt{a^2-x^2}=a\sin 2\varphi,\quad dx=-2a\sin 2\varphi d\varphi;$$

de la troisième,

$$x=2a\frac{t}{1+t^2},\quad \sqrt{a^2-x^2}=a\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=2a\frac{1-t^2}{1+t^2}dt.$$

La deuxième donne, par exemple,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-2\int d\varphi+\text{C};$$

ou

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\text{arc}\cos\frac{x}{a}+\text{C};$$

résultat connu.

86. *Applications.* — I. Soit

$$y=\int\frac{dx}{1+x-\sqrt{1-x^2}}.$$

La première transformation donne

$$dy=\frac{4\dfrac{zdz}{(z^2+1)^2}}{2\dfrac{z^2}{z^2+1}-2\dfrac{z}{z^2+1}}=2\frac{dz}{(z-1)(z^2+1)},$$

ou

$$dy = \frac{dz}{z-1} - \frac{zdz}{z^2+1} - \frac{dz}{z^2+1}.$$

Conséquemment,

$$y = \mathrm{l}(z-1) - \frac{1}{2}\mathrm{l}(z^2+1) - \operatorname{arc\,tg} z + \mathrm{C},$$

ou

$$y = \mathrm{l}\frac{c(z-1)}{\sqrt{z^2+1}} - \operatorname{arc\,tg} z,$$

ou enfin, b étant une nouvelle constante arbitraire,

$$\int \frac{dx}{1+x-\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{l}\left[b\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\right] + \operatorname{arc\,cos} x \text{ (*)}.$$

II. Soit

$$f(a) = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}},$$

la quantité a étant supérieure à 1 (**).

La deuxième transformation donne

$$\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = -2\frac{d\varphi}{(a-\cos 2\varphi)} = -2\frac{d\varphi}{(a-1)\cos^2\varphi + (a+1)\sin^2\varphi};$$

ou, si l'on pose

$$\operatorname{tg}\varphi = t:$$

$$\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = -2\frac{dt}{a-1+(a+1)t^2}.$$

(*) On a

$$-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,cos} x;$$

et le terme $-\frac{\pi}{2}$ peut être supposé compris dans la constante, laquelle est l. b.

(**) Exemple traité par M. Hermite (*Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, p. 311).

D'ailleurs, aux limites (-1), $(+1)$, correspondent, respectivement :

$$2\varphi = \pi, \quad 2\varphi = 0;$$

puis

$$t = \infty, \quad t = 0.$$

Ainsi

$$f(a) = -2\int_{\infty}^{0} \frac{dt}{(a-1)+(a+1)t^2}.$$

L'intégrale indéfinie est, comme on peut le vérifier,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(t\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right) \text{ (*)};$$

donc

$$\int_{\infty}^{0} \frac{dt}{(a-1)+(a+1)t^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left[0 - \frac{\pi}{2}\right];$$

et, finalement,

$$f(a) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Différentielles binômes.

27. Ce sont celles qui ont la forme $x^p(a+bx^m)^q\,dx$.

1° On peut supposer p et m entiers : si ces exposants étaient fractionnaires, on opérerait comme pour des irrationnelles monômes ;

2° On peut supposer $m > 0$: dans le cas contraire, on change x en $\frac{1}{x}$;

(*) On verra, un peu plus loin, que

$$\int \frac{dx}{A+Bx^2} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{B}{A}}\right) + const.$$

3° L'exposant q doit être supposé fractionnaire; car s'il était entier, la différentielle serait rationnelle.

28. *Cas d'intégrabilité.* — Cela posé, pour essayer de rendre intégrable la différentielle donnée, faisons

$$a + bx^m = z;$$

d'où

$$x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad dx = \frac{1}{m}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{m}-1}\frac{dz}{b};$$

puis

$$dy = x^p(a+bx^m)^q dx = \frac{1}{mb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{p+1}{m}} dz . z^q.$$

Si

$$\frac{p+1}{m} = \textit{entier},$$

la dernière quantité peut être rendue rationnelle; donc la différentielle binôme est intégrable.

Il y a un *second cas d'intégrabilité :* on peut écrire

$$dy = x^{p+mq}(b + ax^{-m})^q dx;$$

donc, en appliquant la première condition, on trouve

$$\frac{p+qm+1}{-m} = \textit{entier},$$

ou

$$\frac{p+1}{m} + q = \textit{entier} \text{ (*)}.$$

29. Exemple : $dy = x^2(1+x^4)^{\frac{1}{4}} dx$. La première condition n'est pas vérifiée; mais $\frac{2+1}{4} + \frac{1}{4} = \textit{entier}$; donc dy est intégrable. En effet, si l'on prend $\frac{1}{x^4} + 1 = t^4$, on a

(*) M. Tchébychew a démontré que *ces deux cas sont les seuls où la différentielle binôme soit intégrable au moyen des signes algébriques et logarithmiques* (Journal de Liouville, t. XVIII).

$$x^4 = \frac{1}{t^4 - 1}, \quad x^3 dx = -\frac{t^3 dt}{(t^4-1)^2};$$

$$dy = x^3\left(\frac{1}{x^4} + 1\right)^{\frac{1}{4}} dx = -\frac{t^3 dt}{(t^4-1)^2}\cdot t;$$

puis

$$\int x^2 (1 + x^4)^{\frac{1}{4}} dx = -\int \frac{dt}{t^4 - 1} + \int \frac{dt}{(t^4-1)^2}.$$

Suite. — Réduction de l'intégrale.

40. Que la différentielle binôme soit ou ne soit pas intégrable, on peut se proposer de la réduire. Cette réduction comporte quatre problèmes particuliers : *Diminuer ou augmenter, soit l'exposant* q, *soit l'exposant* p.

41. *Premier cas. — Réduction de l'exposant* q. En intégrant par parties, et faisant porter l'intégration sur le facteur $x^p dx$, on a :

$$y = \int x^p (a + bx^m)^q dx$$
$$= \frac{x^{p+1}}{p+1}(a + bx^m)^q - \frac{qmb}{p+1}\int x^{p+1}(a + bx^m)^{q-1} x^{m-1} dx$$
$$= \frac{x^{p+1}}{p+1}(a + bx^m)^q - \frac{qmb}{p+1}\int x^{p+m}(a + bx^m)^{q-1} dx.$$

Cette transformation n'atteint pas le but, parce que, m étant positif, on a $p+m > p$. Mais $bx^{p+m} = x^p(a + bx^m - a)$; donc

$$y = \frac{x^{p+1}}{p+1}(a+bx^m)^q - \frac{qm}{p+1}\left[\int x^p(a+bx^m)^q dx - a\int x^p(a+bx^m)^{q-1} dx\right],$$

ou

$$(p+1)y = x^{p+1}(a+bx^m)^q - qmy + aqm\int x^p(a+bx^m)^{q-1} dx.$$

Ainsi

$$\left.\begin{aligned}\int x^p (a + bx^m)^q dx = \frac{1}{p+1+mq} x^{p+1}(a+bx^m)^q \\ + \frac{aqm}{p+1+mq}\int x^p (a+bx^m)^{q-1} dx.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

En employant plusieurs fois la même formule, on retranchera, de l'exposant q, toutes les unités qui y sont contenues.

42. *Remarques.* — I. La formule (5) est illusoire si

$$p+1+mq=0;$$

mais alors la différentielle proposée est intégrable, à cause de

$$\frac{p+1}{m}+q=0=\textit{entier}.$$

En effet,

$$dy=x^p(a+bx^m)^{-\frac{p+1}{m}}dx=(b+ax^{-m})^{-\frac{p+1}{m}}\frac{dx}{x}.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$b+ax^{-m}=z^m,$$

on trouve

$$dy=-\frac{z^{m-p}dz}{z^m-b};$$

quantité rationnelle.

II. La réduction est encore impossible si $p=-1$, c'est-à-dire quand

$$dy=(a+bx^m)^q\frac{dx}{x}.$$

Mais la transformation ci-dessus (**24**) donne

$$dy=\frac{z^q}{m(z-a)}dz;$$

et cette différentielle est intégrable, même lorsque q est fractionnaire (**25**).

43. *Deuxième cas.* — *Réduction de l'exposant* p. Pour l'effectuer, on doit faire porter l'intégration sur $(a+bx^m)^q dx$. Or,

$$x^p(a+bx^m)^q=mbx^{m-1}(a+bx^m)^q\frac{x^{p-m+1}}{mb};$$

donc

$$y = \frac{x^{p-m+1}}{mb(q+1)}(a+bx^m)^{q+1} - \frac{p-m+1}{mb(q+1)}\int x^{p-m}(a+bx^m)^{q+1}dx.$$

Décomposant $(a+bx^m)^{q+1}$ en $(a+bx^m)^q(a+bx^m)$, on a

$$\int x^{p-m}(a+bx^m)^{q+1}dx = a\int x^{p-m}(a+bx^m)^q dx + b\int x^p(a+bx^m)^q dx;$$

puis

$$mb(q+1)y = x^{p-m+1}(a+bx^m)^{q+1} - b(p-m+1)y$$
$$- a(p-m+1)\int x^{p-m}(a+bx^m)^q dx;$$

et enfin

$$\left.\begin{aligned}\int x^p(a+bx^m)^q dx &= \frac{1}{b(mq+p+1)}x^{p-m+1}(a+bx^m)^{q+1}\\ &- \frac{a(p-m+1)}{b(mq+p+1)}\int x^{p-m}(a+bx^m)^q dx.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

44. Au moyen de cette formule (6), on pourra réduire l'exposant p à $p - im$, i étant le quotient entier de p par m. Si $p - im = m - 1$, la dernière différentielle, $x^{m-1}(a+bx^m)^q dx$, est immédiatement intégrable; mais alors

$$\frac{p+1}{m} = i + 1 = \textit{entier}.$$

45. *Troisième cas.* — Si q est négatif, le second membre de la formule (5) est plus compliqué que le premier; car $q - 1$ surpasse q, en valeur absolue. Pour transformer convenablement cette formule, changeons d'abord q en $-q$; nous aurons

$$(p+1-mq)\int x^p(x+bx^m)^{-q}dx$$
$$= x^{p+1}(a+bx^m)^{-q} - aqm\int x^p(a+bx^m)^{-q-1}dx;$$

d'où

$$\int x^p(a+bx^m)^{-q-1}dx = \frac{1}{aqm}x^{p+1}(a+bx^m)^{-q}$$
$$- \frac{p+1-mq}{aqm}\int x^p(a+bx^m)^{-q}dx;$$

et, par le changement de q en $q - 1$:

$$\left.\begin{aligned}\int x^p (a + bx^m)^{-q} dx = \frac{1}{am(q-1)} x^{p+1} (x + bx^m)^{-q+1} \\ - \frac{p + 1 - m(q-1)}{am(q-1)} \int x^p (a + bx^m)^{-q+1} dx.\end{aligned}\right\} (7)$$

46. *Quatrième cas.* — De même, en remplaçant p par $-p$, dans l'égalité (6), on a

$$b(mq - p + 1)\int x^{-p} (a + bx^m)^q dx = x^{-p-m+1} (a + bx^m)^{q+1} + a(p + m - 1)\int x^{-p-m} (a + bx^m)^q dx;$$

$$\int x^{-p-m} (a + bx^m)^q dx = -\frac{1}{a(p+m-1)} x^{-p-m+1} (a + bx^m)^{q+1} + \frac{b(mq - p + 1)}{a(p + m - 1)} \int x^{-p} (a + bx^m)^q dx;$$

et, par le changement de p en $p - m$:

$$\left.\begin{aligned}\int x^{-p} (a + bx^m)^q dx = -\frac{1}{a(p-1)} x^{-p+1} (a + bx^m)^{q+1} \\ + \frac{b(mq - p + m + 1)}{a(p-1)} \int x^{-p+m} (a + bx^m)^q dx.\end{aligned}\right\} (8)$$

Applications.

47. I. Soit

$$y_p = \int x^p (1 + x)^q dx,$$

p étant un nombre entier.

La formule (6) donne successivement, à cause de $a = b = m = 1$:

$$y_p = \frac{1}{p + q + 1} x^p (1 + x)^{q+1} - \frac{p}{p + q + 1} y_{p-1},$$

$$y_{p-1} = \frac{1}{p + q} x^{p-1} (1 + x)^{q+1} - \frac{p - 1}{p + q} y_{p-2},$$

. . . .

$$y_1 = \frac{1}{q + 2} x (1 + x)^{q+1} - \frac{1}{q + 2} y_0.$$

D'ailleurs,

$$y_0 = \int (1+x)^q\,dx = \frac{1}{q+1}x^{q+1}\ (^*).$$

Éliminant $y_{p-1}, y_{p-2}, \ldots y_1$, on trouve

$$y_p = X_p (1+x)^{q+1},$$

en supposant

$$X_p = \frac{1}{p+q+1}x^p - \frac{p}{(p+q+1)(p+q)}x^{p-1} +$$
$$\frac{p(p-1)}{(p+q+1)(p+q)(p+q-1)}x^{p-2} - \ldots \pm \frac{p(p-1)\ldots 1}{(p+q+1)(p+q)\ldots(q+1)}.$$

18. *Remarque.* — De

$$x^p = (\overline{1+x}-1)^p = (1+x)^p - \frac{p}{1}(1+x)^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}(1+x)^{p-2} - \ldots \pm 1,$$

on conclut

$$y_p = \frac{1}{p+q+1}(1+x)^{p+q+1} - \frac{p}{1}\frac{1}{p+q}(1+x)^{p+q}$$
$$+ \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{1}{p+q-1}(1+x)^{p+q-1} - \ldots \pm \frac{1}{q+1}(1+x)^{q+1}.$$

Ces deux valeurs de y_p ne pourraient différer que par une constante. Comme elles s'annulent pour $x = -1$, *elles sont égales*. On a donc cette *identité* :

$$x^p - \frac{p}{p+q}x^{p-1} + \frac{p(p-1)}{(p+q)(p+q-1)}x^{p-2} - \ldots$$
$$\pm \frac{p(p-1)\ldots 1}{(p+q)(p+q-1)\ldots(q+1)} = (1+x)^p - \frac{p}{1}\frac{p+q+1}{p+q}(1+x)^{p-1}$$
$$+ \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{p+q+1}{p+q-1}(1+x)^{p-2} - \ldots \pm \frac{p+q+1}{q+1}.$$

(*) Toutes ces formules, ainsi que les suivantes, sont en défaut pour $q = -1, q = -2, \ldots, q = -(p+1)$.

19. II. Soit

$$y_p = \int \frac{x^p dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x^p (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

p étant *entier positif.* On a

$$m=2, \quad q=-\frac{1}{2}, \quad a=1, \quad b=-1$$

donc, par la formule (6),

$$y_p = -\frac{1}{p}\sqrt{1-x^2}\, x^{p-1} + \frac{p-1}{p} y_{p-2}.$$

De même,

$$y_{p-2} = -\frac{1}{p-2}\sqrt{1-x^2}\, x^{p-3} + \frac{p-3}{p-2} y_{p-4},$$

$$y_{p-4} = -\frac{1}{p-4}\sqrt{1-x^2}\, x^{p-5} + \frac{p-5}{p-4} y_{p-6},$$

. . . .

Si p est *pair,* la dernière égalité est

$$y_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\, x + \frac{1}{2}\arc \sin x.$$

Si p est *impair,* on arrive à

$$y_3 = -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\,.\,x^2 + \frac{2}{3}\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\,.\,x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}.$$

Dans le premier cas, la valeur de l'intégrale est

$$\left.\begin{aligned} y_p = &- \left[\frac{1}{p}x^{p-1} + \frac{p-1}{p(p-2)}x^{p-3} + \dots + \frac{(p-1)(p-3)\dots 3.1}{p(p-2)\dots 4.2}x\right]\sqrt{1-x^2} \\ &+ \frac{(p-1)(p-3)\dots 3.1}{p(p-2)\dots 4.2}\arc \sin x + C; \end{aligned}\right\} (A)$$

et, dans le second,

$$\left.\begin{array}{c} y_p = - \\ \left[\frac{1}{p}x^{p-1} + \frac{p-1}{p(p-2)}x^{p-3} + \ldots + \frac{(p-1)(p-3)\ldots 4.2}{p(p-2)\ldots 3.1}\right]\sqrt{1-x^2} + C. \end{array}\right\} \quad (B)$$

50. III. Les formules (A), (B) se simplifient beaucoup lorsque les intégrales sont prises entre 0 et 1. En effet,

$$\int_0^1 \frac{x^p dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(p-1)}{2.4.6\ldots\ p.}\frac{\pi}{2}; \qquad (A')$$

$$\int_0^1 \frac{x^p dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots(p-1)}{3.5.7\ldots\ p.}; \qquad (B')$$

selon que p est *pair* ou *impair*.

Formule de Wallis (*).

51. On peut démontrer que, p croissant indéfiniment, *le rapport des intégrales* (A'), (B') *tend vers l'unité*. En admettant cette proposition, nous avons

$$1 = \frac{\pi}{2} \lim \frac{\dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ .2n}}{\dfrac{2.4.6\ldots\ .2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}},$$

ou

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\ldots; \qquad (C)$$

formule remarquable, due à Wallis. Les facteurs du *produit indéfini* sont, alternativement, plus grands et plus petits que 1. De là résulte que les fractions

$$\frac{2}{1},\ \frac{4}{3},\ \frac{16}{9},\ \frac{64}{45},\ldots$$

approchent de $\frac{\pi}{2}$, successivement par défaut et par excès.

(*) Wallis (Jean), célèbre Géomètre anglais, né en 1616, à Astifort; mort en 1703.

Exercices.

I. $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}} = \frac{3x+2}{4x^2}\sqrt{x-1} + \frac{3}{4}\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{x}} + C.$$

II. $$\int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{x(x^2-3)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,sin} x + C.$$

III. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{l}\,\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1} - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C:$$

$$z = (1+x^{-3})^{\frac{1}{3}}.$$

IV. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \mathrm{l}\,(\sqrt[3]{2}-1) + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}+1}.$$

V. $$\int \frac{dx}{x(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2a^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a}}$$

$$+ \frac{1}{a^2\sqrt{a+bx^2}} + \frac{1}{3a(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} + C.$$

VI. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x}$$

$$+ \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sin} x + C.$$

CHAPITRE V.

INTÉGRATION DE QUELQUES FONCTIONS CIRCULAIRES.

52. I. Soit $$dy = \sin x \cos x dx.$$

L'intégration par parties donne

$$y = \int \sin x d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

On peut encore intégrer en observant que

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

On trouve ainsi

$$y = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C'.$$

53. *Remarque.* — En égalant ces deux résultats, on conclut

$$\frac{1}{2} \sin^2 x + C = -\frac{1}{4} \cos 2x + C'.$$

Pour trouver la relation qui existe entre C et C′, il suffit de supposer $x = 0$: l'équation se réduit à

$$C = -\frac{1}{4} + C';$$

donc, en général,

$$\frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x);$$

ce qui est exact.

54. II. Plus généralement, soit $y = \int \sin^p x \cos^q x dx$. Cette intégrale peut être transformée de différentes manières :

1° Si l'on fait $\sin^2 x = \theta$, il vient

$$\cos^2 x = 1 - \theta, \quad dx = \frac{d\theta}{2\sqrt{\theta(1-\theta)}}, \quad y = \frac{1}{2} \int \theta^{\frac{p-1}{2}} (1-\theta)^{\frac{q-1}{2}} d\theta.$$

On a donc une différentielle binôme : l'intégration est possible (**28**) si $\frac{p+1}{2} =$ *entier* et si $\frac{p+q}{2} =$ *entier*.

2° On peut trouver des formules de réduction, analogues à celles qui se rapportent aux différentielles binômes.

Par exemple, p et q étant supérieurs à l'unité :

$$y_q = \int \sin^p x \,.\, \cos x dx \,.\, \cos^{q-1} x = \frac{1}{p+1} \sin^{p+1} x \cos^{q-1} x$$
$$+ \frac{q-1}{p+1} \int \sin^{p+2} x \cos^{q-2} x \,.\, dx.$$

La nouvelle intégrale peut être écrite ainsi :

$$\int \sin^p x \,(1 - \cos^2 x) \cos^{q-2} x dx = \int \sin^p x \cos^{q-2} x dx - y_r$$

Donc

$$(p+1) y_q = \sin^{p+1} x \cos^{q-1} x + (q-1) y_{q-2} - (q-1) y_q;$$

et enfin

$$y_q = \frac{1}{p+q} \sin^{p+1} x \cos^{q-1} x + \frac{q-1}{p+q} y_{q-2}.$$

Si q est entier, cette formule réduit l'intégrale proposée à

$$y_1 = \int \sin^p x \cos x dx,$$

ou à

$$y_0 = \int \sin^p x dx.$$

Or

$$y_1 = \frac{1}{p+1} \sin^{p+1} x;$$

et, si p est entier, on peut exprimer y_0 sous forme finie, parce que *l'un des nombres* p, p + 1 *est pair.*

3° Supposons *p, q négatifs et entiers*. Soit

$$y_q = \int \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \sin^{-p} x \cos^{-q+2} x$$
$$= \operatorname{tg} x \sin^{-p} x \cos^{-q+2} x -$$
$$\int \operatorname{tg} x \,(- p \sin^{-p-1} x \cos^{-q+3} x + \overline{q-2} \sin^{-p+1} x \cos^{-q+1} x)\, dx,$$

ou

$$y_q = \frac{1}{\sin^{p-1} x \cos^{q-1} x} + p \int \frac{dx}{\sin^p x \cos^{q-2} x} - (q-2) \int \frac{dx}{\sin^{p-2} x \cos^q x}.$$

On a

$$\int\frac{dx}{\sin^{p-2}x\cos^q x}=\int\frac{\sin^2 x dx}{\sin^p x\cos^q x}=\int\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}-\int\frac{dx}{\sin^p x\cos^{q-2}x}$$
$$=y_q-y_{q-2}.$$

Ainsi

$$y_q=\frac{1}{\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x}+py_{p-2}-(q-2)(y_q-y_{q-2});$$

puis

$$y_q=\frac{1}{(q-1)\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x}+\frac{p+q-2}{q-1}y_{q-2}. \tag{A}$$

Si q est *pair*, on arrive à $y_0=\int\frac{dx}{\sin^p x}$; et, si q est *impair*, à $y_1=\int\frac{dx}{\sin^p x\cos x}$. Opérant sur ces intégrales, à peu près comme nous venons de l'indiquer, on pourra les réduire, suivant les cas, à

$$\int dx,\quad \int\frac{dx}{\sin^2 x},\quad \int\frac{dx}{\cos x},\quad \int\frac{dx}{\sin x\cos x}.$$

4° Enfin, p et q étant *entiers positifs*, on peut remplacer $\sin^p x$, $\cos^q x$, $\sin^p x\cos^q x$ par leurs valeurs en fonction des sinus et cosinus des multiples de x; et, par suite, effectuer l'intégration.

55. Exemple :

$$y=\int\sin^3 x\cos^4 x dx.$$

On a

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x;\qquad \cos^4 x=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}.$$

Donc

$$32\sin^3 x\cos^4 x=$$
$$[3\sin x\cos 4x+12\sin x\cos 2x-\sin 3x\cos 4x-4\sin 3x\cos 2x]$$
$$+3(3\sin x-\sin 3x).$$

De plus :

$$\sin x\cos 4x=\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin 3x),$$

$$\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x),$$

$$\sin 3x \cos 4x = \frac{1}{2}(\sin 7x - \sin x),$$

$$\sin 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x).$$

Au moyen de ces valeurs, la fonction entre parenthèses devient

$$\frac{1}{2}(-15 \sin x + 9 \sin 3x - \sin 5x - \sin 7x).$$

Ainsi

$$\sin^5 x \cos^4 x = \frac{1}{64}(3 \sin x + 3 \sin 3x - \sin 5x - \sin 7x).$$

Multipliant par dx, et intégrant chaque terme, on a enfin

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx = \frac{1}{64}\left[-3 \cos x - \cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{7}\cos 7x\right] + C;$$

et, si l'on prend pour limites 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x dx = \frac{2}{35}.$$

56. *Vérification.* — Si l'on fait $\cos x = \theta$, on trouve, immédiatement,

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx = -\int \theta^4 (1 - \theta^2) d\theta$$
$$= -\frac{1}{5}\theta^5 + \frac{1}{7}\theta^7 + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

Cette valeur ne diffère pas de la précédente; car (*Alg.*, **220**) :

$$-3\cos x - \cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{7}\cos 7x$$
$$= -\frac{64}{5}\cos^5 x + \frac{64}{7}\cos^7 x \text{ (*)}.$$

57. *Remarque.* — Les intégrales *définies*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx,$$

peuvent, très-facilement, être exprimées *sous forme finie*, quand l'exposant n est un *nombre entier*. En effet, la formule trouvée ci-dessus (**50**, 2°) :

$$y_q = \frac{1}{p+q} \sin^{p+1} \cos^{q-1} x + \frac{q-1}{p+q} y_{q-2},$$

donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx.$$

Par conséquent :

Si n est *pair* :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots\ n};$$

et, si n est *impair* :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{2.4.6\ldots(n-1)}{3.5.7\ldots\ n}.$$

(*) On voit combien il est essentiel de savoir trouver, dans chaque cas particulier, la transformation qui s'y applique le mieux. Cet *art des transformations* constitue l'une des grandes difficultés du calcul intégral : on ne peut l'acquérir qu'après s'y être beaucoup exercé.

Les premiers membres ne changent pas quand x est remplacé par $\frac{\pi}{2} - x$; donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5...(n-1)}{2.4.6...\ n}, \qquad (n \text{ pair})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{2.4.6...(n-1)}{3.5.7...\ n} \qquad (n \textit{ impair}) \ (*).$$

58. III. L'intégrale de $\frac{dx}{\sin x}$ donne lieu à une transformation remarquable (**). Comme

$$\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x,$$

et que

$$d . \operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x},$$

on remplace la différentielle par

$$\frac{1}{2} \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \frac{1}{2} \frac{\left(\dfrac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x}\right)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x};$$

d'où résulte

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \mathrm{l} . \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + \mathrm{C}. \qquad (1)$$

59. IV. Soit à intégrer $\frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$. Si on voulait rendre le dénominateur calculable par logarithmes, on ferait

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \varphi, \quad b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \varphi,$$

(*) Ces formules ne diffèrent pas de celles que nous avons données à propos des différentielles binômes (50, III).

(**) Elle revient à faire $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = t$. (Voir la note suivante.)

et l'on aurait

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi).$$

Cette transformation est applicable à la question actuelle; elle donne

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \varphi)};$$

ou, d'après la formule (1),

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathrm{l.tg}\frac{1}{2}(x + \varphi) + \mathrm{C}.$$

60. V. Soit

$$y = \int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = 2\int \frac{dx}{4 - (1 - \cos 2x)} = 2\int \frac{dx}{3 + \cos 2x}.$$

Posons

$$\cos 2x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \ (^*).$$

De là résulte

$$\sin 2x = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad dx = \frac{du}{1 + u^2},$$

$$y = \int \frac{du}{u^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{\sqrt{2}} + \mathrm{C};$$

et, si l'intégrale est prise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$,

$$y = \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(*) Cette formule, qui équivaut à $\operatorname{tg} x = u$, doit être remarquée : en général, si $dy = \mathrm{F}(\sin x, \cos x)\, dx$, F désignant une fonction rationnelle, il suffit de faire $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = t$, pour rendre *dy algébrique et rationnelle.*

61. *Remarque.* — On arrive plus vite à ce résultat en écrivant

$$dy = \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{2 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\frac{dx}{\sqrt{2}\cos^2 x}}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

62. VI. Plus généralement, soit

$$y = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$$

La dernière transformation donne

$$y = \frac{1}{ab} \int \frac{\frac{a\,dx}{b\cos^2 x}}{1 + \left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right) + C;$$

et, en particulier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab}. \tag{2}$$

63. *Remarque.* — Si l'on suppose

$$a = c + 1, \quad b = c - 1,$$

la formule (2) devient, après quelques réductions,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{c^2 - 2c\cos 2\varphi + 1} = \frac{\pi}{2(c^2 - 1)}.$$

Soient $\varphi = \frac{1}{2}\theta$, $c = \frac{1}{q}$: on trouve

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 - 2q\cos\theta + q^2} = \frac{\pi}{1 - q^2}; \tag{3}$$

résultat qu'il est bon de connaître.

64. VII. Comme dernier exemple, prenons l'intégrale

$$y = \int dx \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 x}},$$

que l'on rencontre dans un problème de Géométrie sphérique (*).

En essayant diverses substitutions, on arrive à celle-ci :

$$\cos x = \sqrt{\frac{z^2 + \sin^2 \alpha}{z^2 + 1}}.$$

On en déduit :

$$\sin x = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{z^2 + 1}}, \quad dx = -\cos \alpha \frac{z dz}{(z^2 + 1)\sqrt{z^2 + \sin^2 \alpha}},$$

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 x}} = \frac{z \cos \alpha}{\sqrt{z^2 + \sin^2 \alpha}};$$

et, par conséquent,

$$y = -\cos^2 \alpha \int \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)(z^2 + \sin^2 \alpha)}.$$

La fraction

$$\frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + \sin^2 \alpha)}$$

est décomposable en

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha}\left(\frac{1}{z^2 + 1} - \frac{\sin^2 \alpha}{z^2 + \sin^2 \alpha}\right);$$

donc

$$y = -\operatorname{arc\,tg} z + \sin^2 \alpha \int \frac{dz}{z^2 + \sin^2 \alpha},$$

ou

$$\int dx \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 x}} = -\operatorname{arc\,tg} z + \sin \alpha \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\sin \alpha} + C.$$

(*) *Journal de Liouville*, t. VI, p. 428.

Pour avoir un résultat simple, supposons que les limites de la première intégrale soient $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}-\alpha$. A ces valeurs de x correspondent, respectivement, $z=+\infty$, $z=0$; donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} dx\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2 x}}=\frac{\pi}{2}(1-\sin\alpha).$$

65. *Remarque.* — Le calcul ci-dessus peut être abrégé. On a

$$\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2 x}}=\frac{1}{\cos x}\sqrt{\cos^2 x-\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2 x-\sin^2\alpha}{\cos x\sqrt{\cos^2 x-\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2\alpha}}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos x\sqrt{\cos^2 x-\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2 x}}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos x\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2 x}};$$

donc

$$dy=\frac{\cos x\,.\,dx}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2 x}}-\frac{\sin^2\alpha\,.\,dx}{\cos x\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2 x}}.$$

Le premier terme est la différentielle de $-\text{arc}\cos\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$; le second, la différentielle de $\sin\alpha\,\text{arc}\cos(\text{tg}\,x\;\text{tg}\,\alpha)$ (*). Par conséquent,

$$y=-\text{arc}\cos\left(\frac{\sin x}{\cos\alpha}\right)+\sin\alpha\,\text{arc}\cos(\text{tg}\,x\;\text{tg}\,\alpha)+C;$$

valeur qui s'accorde avec la première.

(*) En effet, cette différentielle égale

$$-\sin\alpha\frac{\frac{\text{tg}\,\alpha}{\cos^2 x}dx}{\sqrt{1-\text{tg}^2 x\,\text{tg}^2\alpha}}=-\frac{\sin^2\alpha\,.\,dx}{\cos x\sqrt{\cos^2 x\cos^2\alpha-\sin^2 x\sin^2\alpha}}$$

$$=-\frac{\sin^2\alpha\,.\,dx}{\cos x\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2 x}}.$$

Exercices.

I. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right) + \mathrm{C}.$$

II. Si $a=b$, que devient la formule précédente?

III. $$\int \frac{\cos x\,dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{a}{a^2-b^2}\,\frac{\sin x}{a+b\cos x} - \frac{2b}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right) + \mathrm{C}.$$

IV. $$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4}\cot x\left(\frac{1}{\sin^3 x} + \frac{3}{2\sin x}\right) + \frac{3}{8}\,\mathrm{l.}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \mathrm{C}.$$

V. $$\int x^3 \sin x\,dx = (3x^2-6)\sin x - (x^3-6x)\cos x + \mathrm{C}.$$

VI. $$\int x^3 \cos x\,dx = (3x^2-6)\cos x + (x^3-6x)\sin x + \mathrm{C}.$$

VII. $$\int \frac{dx}{1+\cos\alpha\sin x} = \frac{2}{\sin\alpha} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cos\alpha + \operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\sin\alpha}\right) + \mathrm{C}.$$

VIII. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos\alpha\sin x} = \frac{\alpha}{\sin\alpha}\ (^*).$$

IX. $$\int \frac{\cos^2 x \sin x\,dx}{\sqrt{1+e^2\sin^2 x}} = -\frac{3\cos x\sqrt{1+e^2\sin^2 x}}{2e^2} + \frac{1+e}{2e^3}\arccos\left(\frac{e\cos x}{\sqrt{1+e^2}}\right) + \mathrm{C}.$$

(*) De cette formule, cas particulier de la précédente, on conclut, par un changement de lettres,

$$\frac{x}{\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{1+\cos x\sin\alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{1+\cos x\cos\beta};$$

puis le moyen de *développer* $\frac{x}{\sin x}$ *suivant les puissances de* $\cos x$.

X. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \sin x dx}{\sqrt{1+e^2 \sin^2 x}} = \frac{3}{2e^2} + \frac{1+e^2}{2e^3} \operatorname{arc\,tg} e.$$

XI. Démontrer que, si l'on fait $y_n = \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$, on a

$$y_n = -\frac{b \sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)} y_{n-1} - \frac{(n-2)}{(n-1)(a^2-b^2)} y_{n-2}.$$

CHAPITRE VI.

FONCTIONS EXPONENTIELLES OU LOGARITHMIQUES.

66. Les cas où l'intégration est possible sont fort rares. En voici quelques-uns :

1° $$y = \int (l\,x)^n x^p dx.$$

Si l'on pose $x = e^{\frac{z}{p+1}}$, on a

$$y = \frac{1}{(p+1)^{n+1}} \int z^n e^z dz.$$

Quand n est entier positif, on peut intégrer (12). Du reste, l'intégration par parties donne

$$y = \frac{x^{p+1}}{p+1}(l\,x)^n - \frac{n}{p+1}\int (l\,x)^{n-1} x^p dx;$$

ou, pour plus de régularité dans la notation,

$$y^n = \frac{x^{p+1}}{p+1}(l\,x)^n - \frac{n}{p+1} y_{n-1}.$$

D'ailleurs $y_0 = \frac{x^{p+1}}{p+1}$; donc, comme nous venons de le dire, on pourra trouver y_n si n est entier positif.

2°
$$y = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx.$$

Si l'on met la fraction sous la forme $\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}$, on a, immédiatement,

$$y = 2\,\mathrm{l}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) + \mathrm{C}.$$

3° $y = \int x\,\mathrm{l}(1 - x^4)\, dx = \frac{1}{2} x^2 \mathrm{l}(1 - x^4) + 2\int \frac{x^5 dx}{1 - x^4}.$

La fraction $\frac{x^5}{1-x^4}$ est décomposable en

$$-x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1 - x^2} + \frac{x}{1 + x^2}\right).$$

Conséquemment,

$$\int \frac{x^5 dx}{1 - x^4} = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{l}\,\frac{1 + x^2}{1 - x^2};$$

puis

$$y = \frac{1}{2} x^2 \mathrm{l}(1 - x^4) - x^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1 + x^2}{1 - x^2} + \mathrm{C},$$

ou

$$y = \frac{1}{2}(1 + x^2)\,\mathrm{l}(1 + x^2) - \frac{1}{2}(1 - x^2)\,\mathrm{l}(1 - x^2) - x^2 + \mathrm{C}.$$

En particulier,

$$\int_0^1 x\,\mathrm{l}(1 - x^4)\, dx = \mathrm{l}(2) - 1 \text{ (*)}.$$

67. Soit à déterminer

$$\mathrm{A}_n = \int x^n e^x \sin x dx, \quad \mathrm{B}_n = \int x^n e^x \cos x dx,$$

n étant entier positif.

(*) A cause de $(1 - x^2)\,\mathrm{l}(1 - x^2) = 0$ *pour* $x^2 = 1$ (ALG., 88).

L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} A_n &= -x^n e^x \cos x + \int \cos x\,(x^n e^x + n x^{n-1} e^x)\,dx \\ &= -x^n e^x \cos x + B_n + n B_{n-1}, \\ B_n &= x^n e^x \sin x - \int \sin x\,(x^n e^x + n x^{n-1} e^x)\,dx \\ &= x^n e^x \sin x - A_n - n A_{n-1}. \end{aligned}$$

On tire, de ces équations :

$$A_n = \frac{1}{2} x^n e^x (\sin x - \cos x) - \frac{n}{2}(A_{n-1} - B_{n-1}), \qquad (1)$$

$$B_n = \frac{1}{2} x^n e^x (\sin x + \cos x) - \frac{n}{2}(A_{n-1} + B_{n-1}). \qquad (2)$$

D'ailleurs :

$$\begin{aligned} A_0 &= \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - B_0, \\ B_0 &= \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + A_0; \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$A_0 = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \quad B_0 = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x). \quad (3)$$

On peut donc, de proche en proche, déterminer $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$

68. Si les intégrales A_n, B_n sont prises entre $x = -\infty$ et $x = 0$, les relations (1), (2) se réduisent à

$$A_n = -\frac{n}{2}(A_{n-1} - B_{n-1}), \quad B_n = -\frac{n}{2}(A_{n-1} + B_{n-1}).$$

De celles-ci, on conclut aisément

$$A_n = -nA_{n-1} - \frac{n(n-1)}{2} A_{n-2}, \quad B_n = -nB_{n-1} - \frac{n(n-1)}{2} B_{n-2}. \quad (4)$$

Ainsi, en partant de

$$A_0 = -\frac{1}{2}, \quad B_0 = +\frac{1}{2}, \quad A_1 = +\frac{1}{2}, \quad B_1 = 0,$$

on peut, au moyen des formules (4), calculer séparément les intégrales A_n et les intégrales B_n (*).

Exercices.

I. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\operatorname{arc\,tg} x}\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}}\right).$$

II. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\operatorname{arc\,tg} x}\,x\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\right).$$

III. Calculer $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x} \sin x\,dx$ et $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x} \cos x\,dx$, n étant un nombre entier.

IV. $$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + e^x + e^{2x}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

V. $$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx = (n-1)\int_0^\infty e^{-x} x^{n-2}\,dx,$$

pourvu que $n-1$ soit *positif* (**).

VI. *Si* n *est un nombre entier,*

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx = 1.2.3\ldots(n-1)\ (^{**}).$$

(*) Par des méthodes que nous ne pouvons indiquer ici, on trouve

$$A_n = (-1)^{n+1}\,\frac{1.2.3\ldots.n}{2^{\frac{n+1}{2}}}\,\sin(n+1)\frac{\pi}{4},$$

$$B_n = (-1)^n\,\frac{1.2.3\ldots.n}{2^{\frac{n+1}{2}}}\,\cos(n+1)\frac{\pi}{4}.$$

(**) Ces propositions appartiennent à la théorie des *intégrales eulériennes*, qui a été l'objet des recherches d'un grand nombre de Géomètres.

CHAPITRE VII.

INTÉGRATION PAR SÉRIES.

---

69. On a vu, dans l'*Algèbre* (Chap. X), quelques exemples du *développement d'une fonction, résultant du développement de la dérivée.* Pour généraliser cette théorie, supposons qu'une fonction $f(x)$ ait été développée en série convergente, de manière que

$$f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + R_n. \qquad (1)$$

D'après l'hypothèse, le reste R_n doit tendre vers zéro, sinon pour toutes les valeurs de x, au moins pour celles qui sont comprises entre deux limites données a, b. Cela posé, on a ce théorème :

La série formée par les intégrales des termes de la série (1) (*), *prises entre* a *et* b, *est convergente, et a pour somme l'intégrale de* f(x) dx, *prise entre les mêmes limites.*

De l'égalité (1), on conclut

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1 dx + \cdots + \int_a^b u_n dx + \int_a^b R_n dx.$$

Soit M le maximum des valeurs que prend R_n, quand x varie entre a et b. On a, en considérant les valeurs absolues,

$$\int_a^b R_n dx < M(b - a).$$

La quantité M tend vers zéro quand n augmente; le facteur $b - a$ est supposé *fini;* donc

$$\lim \int_a^b R_n dx = 0;$$

(*) La multiplication par dx est sous-entendue.

ou

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1 dx + \cdots + \int_a^b u_n dx + \cdots; \qquad (2)$$

ce qu'il fallait démontrer (*).

70. *Remarques.* — I. Au lieu d'adopter b pour limite supérieure de chaque intégrale, on peut prendre celle-ci entre a et x (x étant inférieur à b); et l'on a la formule

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x u_1 dx + \cdots + \int_a^x u_n dx + \cdots, \qquad (3)$$

qui donne, en série convergente, le développement de $\int_a^x f(x)\,dx$.

II. Si l'égalité (1) se réduit à

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

c'est-à-dire si la fonction $f(x)$ est développée suivant la série de Mac-Laurin, la formule (3) devient, en supposant $a = 0$:

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^n}{n} + \cdots \qquad (4)$$

III. Cette nouvelle série, qui résulterait aussi de la formule de Mac-Laurin, directement appliquée, est plus convergente que la précédente (**).

IV. *Si la série* (1), *convergente pour toutes les valeurs*

(*) Ce théorème et cette démonstration, tirés du *Cours d'Analyse de Sturm*, sont contestés par MM. *Darboux* et *Mansion*. (Voir la *Nouvelle Correspondance mathématique*, tome III.)

(**) Par exemple, pour les valeurs de x comprises entre 0 et 1, la *série logarithmique*

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

converge plus rapidement que *la progression*

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

de x *comprises entre* a *et* b, *cesse d'être convergente lorsque* x = b, *la formule* (2) *est encore vraie* (*).

La formule (3) est démontrée pour toutes les valeurs de x comprises entre a et $b-\varepsilon$, ε désignant, suivant l'usage, une quantité positive et infiniment petite. Or, les deux membres de cette égalité (3) sont des fonctions de x, constamment égales; donc leurs valeurs extrêmes, *finies ou infinies*, répondant à $x=b$, sont égales.

V. Chacune des formules (2), (3), (4) peut être considérée de deux manières différentes : 1° comme faisant connaître le *développement d'une intégrale*, indéfinie ou définie; 2° comme donnant la *sommation d'une série*. On a, par exemple (p. 152) :

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \pm \frac{x^n}{n} \mp \cdots;$$

et, si l'on fait $x=1$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 1.2.$$

Applications.

71. Problème I. — *Développer* arc sin x. Si l'on représente par y cette fonction, on a

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots$$

Multipliant par dx, puis intégrant à partir de $x=0$, on trouve la formule demandée :

$$\text{arc sin}\, x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (5)$$

(*) On ajoute ordinairement, à cet énoncé : « *pourvu que la série* (2) *soit convergente.* » Nous pensons que ce complément n'est pas nécessaire.

On en conclut, en faisant $x=\frac{1}{2}$:

$$\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1.3}{2.4.5.4^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7.4^3}+\cdots; \quad (6)$$

et, en supposant $x=1$, limite pour laquelle l'égalité subsiste (70, IV) :

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2.3}+\frac{1.3}{2.4.5}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}+\cdots \quad (7)$$

72. PROBLÈME II. — *Déterminer*

$$y=x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^8}{8}-\frac{x^9}{9}+\cdots \quad (8)$$

Pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, exclusivement, (p. 28) :

$$\frac{dy}{dx}=(1+x-x^2)+(x^3+x^4-x^5)+(x^6+x^7-x^8)+\cdots$$
$$=(1+x-x^2)(1+x^3+x^6+\cdots),$$

ou

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-x-1}{x^3-1};$$

puis, attendu que y s'annule avec x :

$$y=\int_0^x\frac{(x^2-x-1)\,dx}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Appliquant les méthodes indiquées dans le Chapitre VI, on trouve

$$y=\frac{1}{3}\,\mathrm{l}\,\frac{(x^2+x+1)^2}{1-x}. \quad (9)$$

73. *Remarques.* — I. La série (8) est divergente pour $x=1$ (p. 29). Néanmoins la formule (9) subsiste à cette limite; car alors y devient infini (*).

(*) Cette remarque est d'accord avec la note ci-dessus (70, IV).

II. Si l'on fait $x = -1$, on trouve

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3}\,l\,2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\\ + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \cdots;\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

résultat qui, combiné avec

$$l\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \cdots,$$

conduit à celui-ci :

$$0 = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{2}{9}\right) - \cdots,$$

dont la vérification est facile.

74. Problème III. — *Évaluer*

$$y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^{10}}{10} - \frac{x^{12}}{12} + \cdots \quad (11)$$

Opérant comme pour le Problème II, on trouve

$$\left.\begin{aligned} y &= \int_0^x \frac{(x+1)\,dx}{x^2 + x + 1}\\ &= \frac{1}{2}\,l\,(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{3}}{x+2}.\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

De là résulte, si l'on suppose $x = 1$:

$$\frac{1}{2}\,l\,3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \quad (13)$$

75. Problème IV. — *Évaluer*

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} - \frac{x^9}{9} + \cdots \quad (14)$$

On trouve, encore de la même manière,

$$y = \int_0^x \frac{x\,dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\mathrm{l}(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{3}}{x+2}; \quad (15)$$

et, en particulier,

$$\frac{1}{2}\mathrm{l}\,3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots \quad (16)$$

76. *Remarque.* — Les premiers membres des égalités (13), (16) sont les limites dont il est question à la page 30. Conséquemment, *la série*

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \cdots$$

a pour somme l 3. C'est ce qu'il est aisé de vérifier.

77. Problème V. — *Développer*

$$\mathrm{T} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-bx)(ax-x^2)}}, \quad (17)$$

en supposant les constantes a, b *inférieures à l'unité* (*).

Par la formule du binôme,

$$\frac{1}{\sqrt{1-bx}} = 1 + \frac{1}{2}bx + \frac{1.3}{2.4}b^2x^2 + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots.2n}b^nx^n + \cdots$$

Par conséquent, si l'on fait

$$\mathrm{A}_n = \int_0^a \frac{x^n dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

on aura

$$\mathrm{T} = \sum_0^\infty \frac{1.3\ldots.(2n-1)}{2.4\ldots\ldots.2n}\,b^n\mathrm{A}_n. \quad (18)$$

(*) La quantité T représente (à un facteur près) la durée de l'oscillation du pendule simple.

De l'identité

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \int \frac{\left(x-\frac{1}{2}a\right)x^{n-1}dx}{\sqrt{ax-a^2}} + \frac{1}{2}a\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

on conclut, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} A_n &= -\left[x^{n-1}\sqrt{ax-x^2}\right]_0^a (^*) \\ &+ (n-1)\int_0^a x^{n-2}dx\sqrt{ax-x^2} + \frac{1}{2}aA_{n-1} \\ &= (n-1)\int_0^a \frac{x^{n-2}(ax-x^2)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} - \frac{1}{2}aA_{n-1}; \end{aligned}$$

ou

$$A_n = (n-1)\,aA_{n-1} - (n-1)\,A_n + \frac{1}{2}aA_{n-1};$$

et, par conséquent,

$$A_n = \frac{2n-1}{2n}aA_{n-1}.$$

D'ailleurs

$$A_0 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}} = \pi;$$

donc

$$A_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}a^n\pi.$$

La substitution de cette valeur, dans la formule (18), donne enfin

$$T = \pi\sum_0^\infty \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\right]^2 (ab)^n \qquad (19)$$

(*) La notation $[f(x)]_\alpha^\beta$ représente, en général, $f(\beta)-f(\alpha)$. Dans le cas actuel, $f(x)$ s'annule pour $x=\alpha=0$ et pour $x=\beta=a$.

78. *Remarque.* — Si, dans la formule (17), on suppose $x = a\sin^2\varphi$, $ab = c^2$, on trouve

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}.$$

Comparant avec la valeur (19), on a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\sum_0^{\infty}\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\right]^2 c^{2n} \text{ (*)}. \quad (20)$$

Exercices.

I. $$\int_0^1 \frac{lx.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left[1 + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1.3}{2.4.5^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7^2} + \cdots\right].$$

II. $$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2^2} + \frac{1.3}{2.4^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6^2} + \cdots$$

III. $$\int_0^1 \frac{lx.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\left(z^2 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \cdots\right).$$

IV. Conclure, des relations précédentes :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)\frac{dx}{x} = l2, \quad \int_0^1 \frac{lx.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}l2.$$

V. $$\int_0^1 \frac{\sin(t\,lx)\,dx}{lx} = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots = \text{arc tg } t;$$

et, en particulier,

$$\int_0^1 \frac{\sin(lx)\,dx}{lx} = \frac{\pi}{4}.$$

(*) LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 65.

VI. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x} = 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots\right)$ (*).

VII. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$

VIII. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\,dx}{1 + \cos^2 x} = \pi\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{4}.$

IX. Former le développement de la fonction qui a pour dérivée $\frac{1}{2-2x+x^2}$; et en déduire les formules suivantes :

$$\frac{\pi}{2} =$$

$$\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}\right)-\left(\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{8.7}\right)+\left(\frac{1}{16.9}+\frac{1}{16.10}+\frac{1}{32.11}\right)-\cdots,$$

$$4\pi = 5\left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{11.13} + \frac{1}{19.21} + \frac{1}{27.29} + \cdots\right)$$

$$- \left(\frac{1}{1.7} + \frac{1}{9.15} + \frac{1}{17.23} + \frac{1}{25.31} + \cdots\right),$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} = \left(\frac{1}{1.2^3} + \frac{1}{2.2^5} + \frac{1}{3.2^8}\right) - \left(\frac{1}{5.2^{13}} + \frac{1}{6.2^{15}} + \frac{1}{7.2^{18}}\right) + \cdots$$

X. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 + x - \sqrt{1+x^2}}{x}dx = 2 - \sqrt{2} + l\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2.4^2} - \frac{1.3}{2.4.6^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8^2} - \cdots$$

XI. $\displaystyle\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{2}{8}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{2}{12}\right)+\cdots = \frac{3}{2}l2-1.$

XII. Démontrer la *Formule de Gudermann* :

$$l(1+x) = \frac{x}{2+x}\left[2 + \frac{1}{2.3}x^2 - \frac{2}{3.4}x^3 + \frac{3}{4.5}x^4 - \cdots\right].$$

(*) On peut rapprocher ce résultat de celui qui résulte de la formule donnée à la page 595 (note).

XIII. $$\int^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, \mathrm{l}(1 + \cos^2 x)\, dx$$

$$= \frac{8}{15}\left(1 - \frac{6}{2.7} + \frac{6.8}{3.7.9} - \frac{6.8.10}{4.7.9.11} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{5.2} + \frac{1}{7.4} + \frac{1}{9.6} + \cdots\right).$$

XIV. Théorème. — Si

$$f(x) = a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots,$$
$$\varphi(x) = b_1 \cos x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$$

sont deux séries convergentes, la somme de la série

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots$$

est

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

CHAPITRE VIII.

REMARQUES SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES.

Renversement des limites.

79. En supposant $\varphi'(x) = f(x)$, nous avons trouvé (**3**) la *formule de définition :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{1}$$

Il en résulte

$$\int_b^a f(x)\,dx = \varphi(a) - \varphi(b);$$

et, par conséquent,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Ainsi, *quand on intervertit l'ordre des limites d'une intégrale définie, on doit, en même temps, changer le signe du résultat.*

80. Cette règle est surtout utile dans les changements de variables. Soit, par exemple,

$$A = \int^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}.$$

Si, pour rendre algébrique la différentielle, on pose $\cos x = z$ (*), il vient

$$A = -\int_1^0 \frac{dz}{1+z^2};$$

ou, par ce qui vient d'être démontré,

$$A = \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Partage d'une intégrale.

81. α étant une quantité intermédiaire entre les limites a, b, on a

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx = \varphi(\alpha) - \varphi(a),$$

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(\alpha);$$

d'où, par addition,

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(*) Cette transformation, employée pour faire une application de la règle, n'est pas nécessaire : il est visible que l'intégrale *générale* est $-\operatorname{arc\,tg}(\cos x) + C$.

De même,

$$\int_a^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{b} f(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\,dx;$$

et ainsi de suite. *On peut* donc *décomposer une intégrale définie en deux ou plusieurs autres intégrales, dont chacune commence où la précédente finit.*

82. Entre autres applications de ce théorème, nous signalerons celle qui a pour objet de *resserrer les limites données :* si l'on peut disposer des quantités α, β, γ, ..., μ, de manière que chacune des intégrales

$$\int_a^{\alpha}, \int_{\alpha}^{\beta}, \ldots \int_{\lambda}^{\mu}$$

soit nulle, on aura, simplement,

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \int_{\mu}^{b} f(x)\,dx.$$

83. Exemple :

$$A = \int_0^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \,\mathrm{l}\,(1+\cos^2 x)\,dx,$$

n *étant un nombre entier.*

Si l'on décompose A en

$$\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \cdots + \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} + \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}},$$

chacune des $2n$ premières intégrales est nulle, parce que *les éléments en sont, deux à deux, égaux et de signes contraires* (*). Donc

$$A = \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \,\mathrm{l}\,(1+\cos^2 x)\,dx.$$

Soit maintenant $x = 2n\pi + z$: les limites de l'intégrale

(*) En effet, pour deux valeurs de x également éloignées de $(k-1)\pi$ et de $k\pi$, $\cos^5 x$ a des valeurs égales et de signes contraires, tandis que $\mathrm{l}\,(1+\cos^2 x)$ a des valeurs égales.

relative à z sont 0 et $\frac{\pi}{2}$; en sorte que la formule précédente devient

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 z \, l\,(1 + \cos^2 z)\, dz;$$

ou, ce qui est équivalent, les *limites étant indépendantes de la variable*,

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, l\,(1 + \cos^2 x)\, dx.$$

Telle est la forme à laquelle se réduit l'intégrale proposée (*).

Intégrales infinies ou indéterminées.

84. L'équation fondamentale

$$\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (1)$$

suppose la fonction $f(x)$ *finie et continue* depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$. De plus, quand nous l'avons démontrée (3, 4), nous avons admis, tacitement, que les limites a, b étaient *finies*. Cette seconde hypothèse peut être écartée; et, pourvu que $f(x)$ ne devienne pas infinie *entre* $x=a$ et $x=b$, *l'équation* (1) *définit*, dans tous les cas, *l'expression*

$$\int_a^b f(x)\, dx \ (^{**}).$$

Dès lors, *si l'intégrale générale*, $\varphi(x) + C$, *devient infinie*

(*) On trouve aisément

$$A = -\frac{4}{9} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\, l\,(1+\sqrt{2}).$$

(**) Cependant, si l'intégrale générale devient *discontinue*, mais non infinie, pour $x=a$, l'égalité (1) ne suffit plus : on la remplace par

$$\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - lim\, \varphi(a + \varepsilon),$$

ε étant une quantité positive, infiniment petite. La même remarque s'applique au cas où la fonction $\varphi(x)$ serait discontinue pour $x=b$.

ou indéterminée pour x = a *ou pour* x = b, *il en sera de même, ordinairement, pour l'intégrale définie.*

85. EXEMPLES :

1°
$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \mathrm{l}(1) - \mathrm{l}(0) = +\infty;$$

2°
$$\int_0^\infty e^x dx = [e^x]^\infty = +\infty;$$

3°
$$\int_0^\infty \cos x dx = \sin(\infty):$$

l'intégrale est *indéterminée.*

86. *Remarques.* — I. Le dernier cas se présente toutes les fois que, l'une des limites étant *infinie,* la fonction $f(x)$ est *périodique, et, alternativement, positive et négative.* En effet, l'intégrale définie peut alors être assimilée à une *série indéterminée.* (*Alg.*, **9.**)

Soit, par exemple,

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\mathrm{l}(1+\sin^2 x)}:$$

probablement, la fonction $\varphi(x)$ sera toujours inconnue. Néanmoins, si l'on prend d'abord $b = 2n\pi + \alpha$, et que l'on fasse

$$u_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin^3 x}{\mathrm{l}(1+\sin^2 x)} dx \text{ (*)}, \quad R_{2n} = \int_{2n\pi}^{2n\pi+\alpha} \frac{\sin^3 x}{\mathrm{l}(1+\sin^2 x)} dx,$$

on a

$$\varphi(b) - \varphi(0) = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2n} + R'_{2n}.$$

Or,

$$u_1 = -u_2 = +u_3 = -u_4 = \cdots = -u_{2n};$$

donc

$$\varphi(b) - \varphi(0) = \int_{2n\pi}^{2n\pi+\alpha} \frac{\sin^3 x}{\mathrm{l}(1+\sin^2 x)} dx,$$

(*) La fraction $\frac{\sin^3 x}{\mathrm{l}(1+\sin^2 x)}$ prend la forme $\frac{0}{0}$ quand $\sin x = 0$. Mais, comme la vraie valeur est *zéro, aucun des éléments de l'intégrale n'est infini.*

ou (**82**)

$$\varphi(b) - \varphi(0) = \int_0^\alpha \frac{\sin^3 x}{l(1+\sin^2 x)}\, dx.$$

Si maintenant on fait croitre n indéfiniment, en laissant α *variable* (mais compris entre 0 et 2π), on conclut, de la dernière égalité, que $\varphi(\infty) - \varphi(0)$ *est finie et indéterminée.*

II. *Si la fonction* $\varphi(\mathrm{x})$ *devient infinie pour* $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ *et pour* $\mathrm{x} = \mathrm{b}$, *l'intégrale peut être indéterminée.* Soient

$$f(x) = e^{x^2}x, \quad a = -\infty, \quad b = +\infty :$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}x\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \infty - \infty.$$

Intégrale d'une différentielle discontinue.

87. Si la fonction $f(x)$ devient infinie ou seulement discontinue pour une valeur α de x, comprise entre les limites a, b, les théorèmes des nos (3) et (5) doivent être modifiés. Il est clair, en effet, qu'un terme de la quantité

$$\sum f(x)\,\Delta x$$

devenant infini, l'égalité

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim \sum f(x)\,\Delta x$$

n'a plus de sens. Pour définir le premier membre, on suppose, comme nous l'avons déjà dit (**84**, *note*) :

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx = lim \int_a^{\alpha-\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx = lim \int_{\alpha-\eta}^b f(x)\,dx; \tag{4}$$

ε, η désignant, suivant l'usage, des quantités positives, infiniment petites; puis, comme ci-dessus (**81**) :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)\,dx \text{ (*)}. \qquad (5)$$

88. Exemples. — I. $A = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$.

La fonction $\frac{1}{x}$ devenant infinie pour $x=0$, il y a lieu d'écrire

$$A = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{+1} \frac{dx}{x} = lim \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + lim \int_{\eta}^{+1} \frac{dx}{x}.$$

$$= lim\left[\mathrm{l}.(-\varepsilon) - \mathrm{l}(-1)\right] + lim\left[(1) - \mathrm{l}(\eta)\right]$$

$$= lim\left[\mathrm{l}(\varepsilon) - \mathrm{l}(\eta)\right] = lim\,\mathrm{l}.\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right).$$

Mais, comme les quantités ε, η sont indépendantes l'une de l'autre, la fraction $\frac{\varepsilon}{\eta}$ peut avoir une grandeur quelconque; et, en conséquence, *l'intégrale* A *est indéterminée.*

II. $$A = \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= lim \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + lim \int_{1+\eta}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= lim\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + lim\left[-1 - \frac{1}{\eta}\right] = -2 + lim\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\eta}\right):$$

l'intégrale est encore indéterminée (**).

(*) Presque toujours, on peut se dispenser d'avoir égard aux *équations de définition* (3), (4) : sauf le cas, très-rare, où la fonction $f(x)$ serait *discontinue, mais non infinie, pour* $x=\alpha$, les notions précédentes suffisent.

(**) Si l'on écrit, conformément à l'indication donnée dans la note précédente,

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x-1}\right]_1^2,$$

on a, tout de suite,

$$A = -\infty + \infty.$$

II.

INTÉGRALES MULTIPLES.

CHAPITRE IX.

PRÉLIMINAIRES.

Des intégrales doubles.

89. De l'égalité

$$\frac{dF}{dx} = f(x),$$

nous avons conclu (1)

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Soit maintenant une quantité U, fonction de deux variables indépendantes x, y, à déterminer par la condition

$$\frac{d^2U}{dy\,dx} = f(x, y). \qquad (1)$$

Il en résulte, premièrement,

$$\frac{dU}{dy} = \int f(x, y)\,dx;$$

puis

$$U = \int dy \int f(x, y)\,dx. \qquad (2)$$

Le second membre de cette égalité (2) est une *intégrale double*. Elle est *définie* ou *indéfinie*, selon que les limites des intégrations sont ou ne sont pas assignées : pour le moment, nous nous occuperons seulement des intégrales indéfinies.

90. D'après la manière dont la formule (2) a été obtenue, les opérations à effectuer pour trouver U sont celles-ci : 1° *on intègre, par rapport à* x, f (x, y) dx, *en regardant la variable* y *comme une constante;* 2° V *étant le résultat de la première intégration, on intègre, par rapport à* y, Vdy.

91. Soit, par exemple,

$$f(x, y) = 4x^3 - 6x^2y + 3y^2.$$

Alors

$$V = \int (4x^3 - 6x^2y + 3y^2)\,dx = x^4 - 2x^3y + 3xy^2;$$

puis

$$U = \int (x^4 - 2x^3y + 3xy^2)\,dy = x^4y - x^3y^2 + xy^3 \text{ (*)}.$$

92. *Remarques.* — I. A cause du théorème exprimé par l'égalité

$$\frac{d^2U}{dydx} = \frac{d^2U}{dxdy},$$

on a

$$U = \int dy \int f(x, y)\,dx = \int dx \int f(x, y)\,dy. \qquad (3)$$

Ainsi, *l'expression d'une intégrale double n'est pas altérée, quand on intervertit l'ordre des intégrations* (**).

II. Dans l'exemple ci-dessus, on aurait pu employer la formule

$$U = \int dx \int (4x^3 - 6x^2y + 3y')\,dy;$$

et l'on aurait trouvé

$$U = \int (4x^3y - 3x^2y^2 + y^3)\,dx = x^4y - x^3y^2 + xy^3.$$

III. Si l'ordre des intégrations n'est pas encore fixé, on écrit

$$U = \iint f(x, y)\,dxdy.$$

(*) Cette valeur de U est une *intégrale particulière* : on verra, ci-après, comment elle doit être complétée.

(**) Dans le cas des *intégrales définies*, cet énoncé est soumis à certaines restrictions.

Fonctions arbitraires.

93. Le raisonnement employé à l'occasion des intégrales simples (2) prouve que :

Si, par un procédé quelconque, on a trouvé une fonction F (x, y) *satisfaisant à la condition*

$$\frac{d^2F}{dydx} = f(x, y),$$

la fonction la plus générale, jouissant de la même propriété, est donnée par la formule

$$U = F(x, y) + \varphi(x) + \Psi(y), \qquad (4)$$

dans laquelle φ *et* Ψ *désignent des fonctions arbitraires* (*).

94. *Application.* — En supposant

$$\frac{d^2U}{dydx} = 4x^3 - 6x^2y + 3y^2,$$

nous avons trouvé (91)

$$F(x, y) = x^4y - x^3y^2 + xy^3.$$

(*) Pour ne laisser aucun doute dans l'esprit du lecteur, nous ajouterons la démonstration suivante.

Soit

$$U = F(x, y) + R,$$

R étant une quantité inconnue. A cause de

$$\frac{d^2U}{dydx} = \frac{d^2F}{dydx} = f(x, y),$$

on a

$$\frac{d^2R}{dydx} = 0.$$

La dérivée de $\frac{dR}{dx}$, relative à y, étant nulle, il s'ensuit que $\frac{dR}{dx}$ *est une quantité indépendante de* y :

$$\frac{dR}{dx} = \varphi'(x).$$

Donc

$$R = \varphi(x) + \Psi(y).$$

La valeur la plus générale de U est donc

$$x^4y - x^3y^2 + xy^3 + \varphi(x) + \Psi(y).$$

95. *Remarque.* — Il ne servirait à rien de prendre, pour *complément de l'intégrale,* $\varphi(x) + \Psi(y) + C$: la *constante arbitraire* C peut être supposée contenue, soit dans $\varphi(x)$, soit dans $\Psi(y)$.

Intégrales triples, quadruples, etc.

96. Les notions précédentes peuvent, évidemment, être étendues au cas où le nombre des variables indépendantes s'élève à trois, quatre, ... Par exemple, *si*

$$\frac{d^3U}{dzdydx} = f(x, y, z):$$

1° *La fonction* U *est égale à l'intégrale triple*

$$\int dz \int dy \int f(x, y, z)\, dx = \iiint f(x, y, z)\, dxdydz,$$

que l'on peut former de six manières différentes;

2° F (x, y, z) *étant une valeur particulière de* U, *on a, généralement,*

$$U = F(x, y, z) + \varphi(y, z) + \Psi(z, x) + \varpi(x, y).$$

97. *Application.* — Soit

$$f(x, y, z) = \cos x + \cos y + \cos z.$$

On peut prendre

$$\int f(x,y,z)\, dx = \sin x + x\cos y + x\cos z,$$

$$\int dy \int f(x,y,z)\, dx = y\sin x + x\sin y + xy\cos z,$$

$$\int dz \int dy \int f(x,y,z)\, dx = F(x,y,z) = yz\sin x + zx\sin y + xy\sin z;$$

donc

$$U = yz\sin x + zx\sin y + xy\sin z + \varphi(y, z) + \Psi(z, x) + \varpi(x, y),$$

les fonctions φ, Ψ, ϖ étant arbitraires.

CHAPITRE X.

INTÉGRALES DÉFINIES DOUBLES.

---

98. Reprenons encore la formule

$$U = \int dy \int f(x, y)\, dx, \qquad (2)$$

mais en supposant que chacune des intégrales simples soit *définie;* et, pour plus de simplicité, admettons, en outre, que les limites des intégrations soient $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, a et b étant des *constantes* (*). S'il en est ainsi, *l'intégrale définie simple,* $\int_0^a f(x, y)\, dx$, *est indépendante de* x : elle se réduit à une fonction de y. En désignant par Y cette fonction, on a donc

$$U = \int_0^b Y dy,$$

quantité indépendante de x *et de* y.

99. *Remarque.* — Si la fonction $f(x, y)$ est décomposable en $f_1(x) \cdot f_2(y)$, la quantité U devient

$$\int_0^b f_2(y)\, dy \int_0^a f_1(x)\, dx,$$

ou plutôt

$$\int_0^b f_2(y)\, dy \times \int_0^a f_1(x)\, dx.$$

Ainsi, dans ce cas, *l'intégrale double,* $\iint f(x, y)\, dxdy$, *est égale au produit de deux intégrales simples* (**).

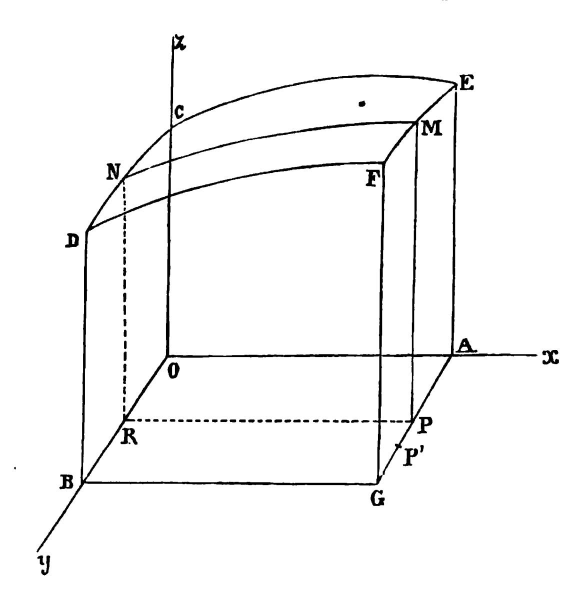
(*) On verra, plus loin, comment on traite le cas où *l'intégrale double doit être étendue à toutes les valeurs de* x *et de* y *satisfaisant à une inégalité donnée.*

(**) Poisson a fait un heureux usage de cette remarque pour déterminer l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$, dont la valeur est $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Interprétation géométrique.

100. Théorème. — *L'intégrale* $\int_0^b dy \int_0^a f(x, y)\, dx$ *représente le volume* v *du corps limité par les trois plans coordonnés et par les surfaces dont les équations sont*

$$x = a, \quad y = b, \quad z = f(x, y).$$



Soit CDEF la dernière surface; soient AEFG, BDFG les plans représentés par $x = a$, $y = b$. Soit enfin MNRP la section déterminée par

$$y = \text{OR} = \textit{const.}$$

L'intégrale $\int_0^a f(x, y)\, dx$ représente l'aire de cette section (4). D'ailleurs, si l'on représente par v le volume du corps dont

il s'agit, et que l'on répète mot à mot la démonstration donnée au n° cité, on a

$$\frac{dv}{dy} = aire\ \mathrm{MNRP};$$

ou, ce qui est équivalent,

$$v = \int_0^b (\mathrm{MNRP})\, dy = \int_0^b dy \int_0^a f(x, y)\, dx \ (*).$$

CHAPITRE XI.

TRANSFORMATION DES VARIABLES DANS LES INTÉGRALES DOUBLES.

101. Lorsque, pour calculer une intégrale simple

$$\mathrm{U} = \int f(x)\, dx,$$

on veut remplacer la variable x par une nouvelle variable u, déterminée par l'équation $x = \varphi(u)$, le problème, comme nous l'avons montré (**14**), ne présente aucune difficulté : on a

$$\mathrm{U} = \int f[\varphi(u)] \frac{dx}{du}\, du.$$

On va voir qu'il n'en est plus de même dans le cas des intégrales multiples.

Considérons, pour plus de simplicité, une intégrale double

$$\mathrm{U} = \int dy \int f(x, y)\, dx; \qquad (1)$$

(*) Au moyen de cette considération géométrique, on peut prouver, *directement*, l'équation fondamentale $\frac{d^2 \mathrm{U}}{dx\,dy} = \frac{d^2 \mathrm{U}}{dy\,dx}$. Voir, pour cette ingénieuse démonstration, le *Compendium der höheren Analysis*, de M. Schlömilch (p. 72).

et supposons que l'on veuille substituer, à x, y, de nouvelles variables u, v, liées aux premières par les équations

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \Psi(u, v). \tag{2}$$

On se tromperait étrangement si, après avoir remplacé x et y par leurs valeurs dans $f(x, y)$, on faisait

$$dxdy = \left(\frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv\right)\left(\frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv\right).$$

En effet, la nouvelle différentielle, au lieu d'avoir la forme $\mathrm{F}(u, v)\,dudv$, aurait celle-ci :

$$\mathrm{A}du^2 + \mathrm{B}dudv + \mathrm{C}dv^2.$$

Il est facile de comprendre la raison de cette anomalie apparente. Quand on intègre $f(x, y)\,dx$, on suppose $y = const$ (90); donc l'on doit prendre, simultanément,

$$dx = \frac{d\varphi}{du}du + \frac{d\varphi}{dv}dv, \quad 0 = \frac{d\Psi}{du}du + \frac{d\Psi}{dv}dv;$$

ou, en éliminant l'une des nouvelles différentielles, dv, par exemple :

$$dx = \left[\frac{d\varphi}{du} - \frac{d\varphi}{dv}\frac{\dfrac{d\Psi}{du}}{\dfrac{d\Psi}{dv}}\right]du.$$

L'intégrale proposée devient, par cette première transformation,

$$\mathrm{U} = \int dy \int f(x, y)\left[\frac{d\varphi}{du} - \frac{d\varphi}{dv}\frac{\dfrac{d\Psi}{du}}{\dfrac{d\Psi}{dv}}\right]du \;(^*);$$

(*) Il est sous-entendu que $f(x, y)$ doit être remplacée par sa valeur en fonction de u et de y.

ou, si l'on intervertit l'ordre des intégrations,

$$\mathrm{U}=\int du\int f(x,y)\left[\frac{d\varphi}{du}-\frac{d\varphi}{dv}\frac{\frac{d\psi}{du}}{\frac{d\psi}{dv}}\right]dy. \qquad (3)$$

Dans cette formule, l'intégration relative à y suppose $u=const$; donc, pour éliminer la variable y, on doit faire

$$dy=\frac{d\psi}{dv}dv.$$

On a ainsi l'expression demandée :

$$\mathrm{U}=\iint f(x,y)\left[\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right]dudv, \qquad (4)$$

dans laquelle x et y doivent être remplacées par leurs valeurs (2).

102. La comparaison des formules (1), (4) conduit à cette règle : *Étant proposée l'intégrale double* $\iint f(x,y)\,dxdy$; *si l'on veut transformer les variables* x, y *en de nouvelles variables* u, v, *on doit faire*

$$dxdy=\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)dudv \text{ (*)}.$$

Applications.

103. Si, x, y étant des coordonnées rectangulaires, u, v sont des coordonnées polaires, les formules (2) se réduisent à

$$x=u\cos v,\quad y=v\sin v.$$

(*) Nous ne pouvons, dans un ouvrage de la nature de celui-ci, indiquer les formules relatives au cas de trois, quatre, ... n variables : le lecteur les trouvera, soit dans le *Calcul intégral* de M. l'abbé Moigno, soit dans le tome XIV des *Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles*.

On tire, de celle-ci,

$$\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}=u;$$

puis

$$\mathrm{U}=\iint f(u\cos v,\, u\sin v)\, ududv;$$

comme nous le vérifierons bientôt (*).

104. Soient encore

$$x=u(1-v),\quad y=uv;$$

transformation employée par Jacobi. Il en résulte, comme dans l'exemple précédent,

$$dxdy=ududv.$$

Exercice.

Au moyen des équations

$$\frac{x^2}{a^2-u^2}+\frac{y^2}{b^2-u^2}+\frac{z^2}{c^2-u^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{a^2-v^2}+\frac{y^2}{b^2-v^2}+\frac{z^2}{c^2-v^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{a^2-w^2}+\frac{y^2}{b^2-w^2}+\frac{z^2}{c^2-w^2}=1,$$

calculer $dxdydz$.

(*) De $dxdy=ududv$, on conclut, par l'intégration,

$$ydx=\frac{1}{2}u^2dv,$$

$$\int ydx=\frac{1}{2}\int udv;$$

pourvu que les limites soient convenablement déterminées.

III.

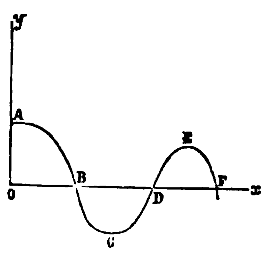
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE XII.

QUADRATURE DES COURBES PLANES.

Préliminaires.

105. On a déjà vu (**4**) en quoi elle consiste, du moins quand la courbe est rapportée à des coordonnées rectangulaires. Avant de passer à de nouvelles applications, nous ferons les remarques suivantes :



1° La différentielle ydx a le même signe que y. Par conséquent, si la courbe coupe l'axe des abscisses aux points B, D, F, …., l'intégrale

$$\int_0^x ydx = aire\ \mathrm{OAB} - aire\ \mathrm{BCD} + aire\ \mathrm{DEF} - \cdot\cdot$$

L'application de la formule des quadratures peut donc conduire à un résultat *négatif* ou *nul;* et, par suite, à peu près illusoire. Du reste, si b, d, f, ... représentent les distances OB, OD, OF, ... les aires OAB, BCD, DEF, ... sont données par les intégrales :

$$+\int_0^b ydx, \quad -\int_b^d ydx, \quad +\int_d ydx,$$

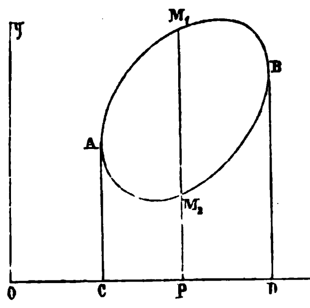
etc.

2° L'aire de la figure limitée par deux ordonnées AB, MP, et par deux courbes AM, A_1M_1, se calcule au moyen de la formule

$$A = \int_a^x (y - y_1)\,dx.$$

3° Si une courbe fermée, convexe, a pour équation

$$f(x, y) = 0, \qquad (1)$$



l'aire de cette courbe est donnée par la formule

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (y_1 - y_2)\,dx, \quad (2)$$

dans laquelle y_1, y_2 représentent les deux valeurs réelles de y qui correspondent à une même valeur de x; et x_1, x_2 le minimum et le maximum des valeurs que l'on peut attribuer à x. Ces *limites* x_1, x_2 sont déterminées par l'équation (1), jointe à

$$\frac{df}{dy} = 0\ (*). \qquad (3)$$

Applications.

106. I. *Calculer l'aire de l'ellipse représentée par*

$$x^2 - xy + y^2 - x - y - 2 = 0.$$

(*) D'après la formule

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}},$$

l'équation (3) exprime qu'aux points A, B, la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées.

On tire, de cette équation,

$$y = \frac{x+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3(x^2-2x-3)},$$

$$y_1 - y_2 = \sqrt{-3(x^2-2x-3)}.$$

Les limites x_1, x_2 sont les valeurs de x qui annulent le radical; savoir

$$x_1 = -1, \quad x_2 = +3;$$

en sorte qu'il est inutile de former l'équation (3). La formule (2) devient

$$A = \sqrt{3}\int_{-1}^{+3} dx\sqrt{4-(x-1)^2}.$$

L'intégrale indéfinie est (**84**) :

$$\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + 2\,\text{arc sin}\,\frac{x-1}{2} + C;$$

donc, le radical s'annulant aux deux limites :

$$A = 2\sqrt{3}\left[\text{arc sin}(1) - \text{arc sin}(-1)\right];$$

ou

$$A = 2\pi\sqrt{3}.$$

107. II. *Calculer l'aire de l'ellipse représentée par*

$$y = ax + b \pm m\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}.$$

D'après la formule (2),

$$A = 2m\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}.$$

Pour trouver cette intégrale, nous emploierons la transformation connue (**85**, III) :

$$\frac{x-x_1}{\sin^2\varphi} = \frac{x_2-x_1}{\cos^2\varphi} = x_2 - x_1.$$

Il en résulte :

$$x = x_1 \cos^2 \varphi + x_2 \sin^2 \varphi, \quad dx = (x_2 - x_2) \sin 2\varphi d\varphi;$$

puis

$$\begin{aligned} A &= m (x_2 - x_1)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi . d\varphi \\ &= \frac{m}{2} (x_2 - x_1)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi) \, d\varphi; \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$A = \frac{m\pi}{4} (x_2 - x_1)^2.$$

On peut vérifier ce résultat en calculant les demi-axes de l'ellipse, et en appliquant ensuite la formule démontrée dans le paragraphe suivant.

Quadrature de l'ellipse.

108. L'équation

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

donne

$$\int y dx = \frac{b}{a} \int dx \sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (4)$$

La seconde intégrale représente l'aire de la partie du cercle dont le rayon est a, correspondant à la partie considérée de l'ellipse : ces deux figures sont comprises entre les mêmes parallèles à l'axe des ordonnées. D'après l'égalité (4), ces aires sont dans le rapport $\frac{b}{a}$. Cette conclusion est évidente par la Géométrie. En particulier, si l'on appelle E l'aire de l'ellipse entière,

$$E = \pi a^2 . \frac{b}{a} = \pi ab.$$

109. *Remarques.* — I. D'après la dernière formule, *l'aire de l'ellipse est la moyenne géométrique entre les aires des cercles décrits sur les axes, pris comme diamètres.* Si l'on considère la *podaire de l'ellipse,* relativement au centre, il est facile de prouver que l'*aire de cette courbe est la moyenne arithmétique entre les aires des deux mêmes cercles.*

En effet, l'équation de la podaire étant

$$a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2,$$

ou

$$u^2 = a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega, \qquad (5)$$

on a

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\omega\right] d\omega;$$

ou bien

$$A = (a^2 + b^2)\frac{\pi}{2}.$$

II. Si, avec l'équation (5), on prend celle-ci :

$$v^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega},$$

qui représente l'ellipse donnée (après un quart de révolution), on a

$$uv = ab.$$

Ainsi, *la podaire d'une ellipse, relativement au centre, est une transformée, par rayons vecteurs réciproques, de la même ellipse, après que celle-ci a fait un quart de révolution.*

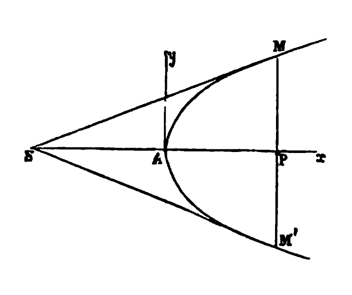
Quadrature de la parabole.

110. De

$$y^2 = 2px,$$

on tire

$$AMP = \int_0^x y\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy.$$



Mais, si MS est la tangente, on a

$$PS = 2x, \quad aire\,PMS = xy;$$

donc

$$AMP = \frac{2}{3}SMP,$$

et

$$MAM' = \frac{2}{3}MSM'.$$

Ainsi, *le segment parabolique* MAM' *est les deux tiers du triangle formé par la corde* MM' *et les tangentes à ses extrémités* (*).

Quadrature de l'hyperbole équilatère.

111. Prenons l'équation de l'hyperbole sous la forme $xy = 1$, et comptons les aires à partir de l'ordonnée AB du sommet. Nous aurons

$$A = aire\,ABPM = \int_1^x \frac{dx}{x} = 1x.$$

Ainsi, *l'aire déterminée par l'hyperbole équilatère, une asymptote, l'ordonnée du sommet et une ordonnée quelconque, est égale au logarithme népérien de l'abscisse correspondant à cette seconde ordonnée* (**). Cette propriété remarquable a fait donner autrefois, aux logarithmes népériens, le nom de *logarithmes hyperboliques* (***).

(*) Ce théorème se trouve dans les *Œuvres d'Archimède*.

(**) On ne doit pas oublier que les abscisses sont comptées sur l'asymptote, à partir du centre.

(***) La dénomination de logarithmes *népériens* a été proposée par Lacroix.

112. *Remarques.* — I. Si l'on mène la droite OM, on a

$$\text{OAB} + \text{BAMP} = \text{AOMP} + \text{MOP}.$$

Mais

$$aire\,\text{MOP} = \frac{1}{2}x.\frac{1}{x} = \frac{1}{2} = aire\,\text{OAB};$$

donc

$$aire\,\text{AOM} = aire\,\text{BAMP} = 1.x\ (^*).$$

II. D'après la propriété fondamentale des logarithmes, si les valeurs de x croissent en progression par quotient, les valeurs de A sont les termes d'une progression par différence. Par exemple, si l'on suppose, successivement :

$$x = e,\quad x = e^2,\quad x = e^3,\quad x = e^4, \ldots$$

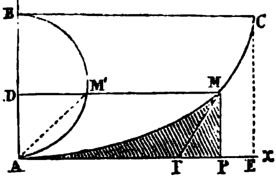
on aura :

$$\text{A} = 1,\quad \text{A} = 2,\quad \text{A} = 3,\quad \text{A} = 4, \ldots;$$

en sorte que *l'aire de chacun des trapèzes ayant pour bases deux ordonnées consécutives est égale à* 1.

Quadrature de la cycloïde.

113. On sait que (p. 500), la tangente MT est parallèle à la corde M'A du cercle décrit sur AB comme diamètre. Donc



$$\frac{dx}{dy} = \frac{\text{DM}'}{\text{AD}} = \frac{\text{DM}'}{\text{MP}} = \frac{1}{y}\sqrt{y(2a-y)},$$

ou

$$dx = dy\sqrt{\frac{2a-y}{y}}.$$

(*) Ce résultat m'a été indiqué par M. *Petitbois*.

La formule ordinaire est

$$\text{AMP} = \int_0^x y dx.$$

Elle devient, puisque y est maintenant la variable indépendante :

$$\text{AMP} = \int_0^y dy \sqrt{2ay - y^2}.$$

Cette intégrale représente l'aire du demi-segment circulaire ADM'. On a donc ce théorème :

$$aire\ \text{AMP} = aire\ \text{ADM}'\ (^*).$$

En particulier,

$$aire\ \text{AEC} = aire\ \text{AM'B} = \frac{1}{2}\pi a^2.$$

Et comme

$$\text{AECB} = \pi a . 2a = 2\pi a^2,$$

il s'ensuit que

$$aire\ \text{ACB} = 2\pi a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Par suite, *la cycloïde entière est équivalente à trois fois le cercle générateur* (**).

(*) On peut le démontrer sans faire usage du signe $\int$. En effet, la relation

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\text{DM}'}{\text{MP}},$$

étant mise sous la forme

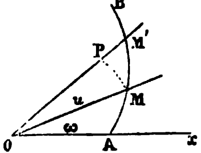
$$\text{MP} . dx = \text{DM}' . dy,$$

il en résulte que les éléments des aires AMP, ADM' sont respectivement égaux; donc ces aires sont égales.

(**) On attribue à Galilée la découverte de cette propriété remarquable.

Emploi des coordonnées polaires.

114. L'élément de surface est le triangle *mixtiligne* OMM'; ou, en négligeant une quantité du deuxième ordre, le secteur OMP. Donc, ainsi que nous l'avons déjà démontré (**108**, *note*),



$$A = \frac{1}{2}\int u^2 d\omega.$$

Applications.

115. I. Soit l'ellipse représentée par

$$u = \frac{p}{1 - e\cos\omega}:$$

$$A = \frac{1}{2}p^2\int\frac{d\omega}{(1 - e\cos\omega)^2}. \qquad (6)$$

Pour que la différentielle devienne algébrique, posons (**60**)

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega = t;$$

d'où résultent :

$$\omega = 2 \operatorname{arc}\operatorname{tg} t, \quad d\omega = 2\frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos\omega = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$1 - e\cos\omega = \frac{1 - e + (1+e)t^2}{1+t^2},$$

$$A = p^2\int\frac{(1+t^2)\,dt}{[1 - e + (1+e)t^2]^2}.$$

La fraction se décompose en

$$\frac{1}{1+e}\left[\frac{1}{1 - e + (1+e)t^2} + \frac{2e}{[1 - e + (1+e)t^2]^2}\right];$$

donc

$$A = \frac{p^2}{1+e}\int \frac{dt}{1-e+(1+e)t^2} + 2\frac{p^2 e}{1+e}\int \frac{dt}{[1-e+(1+e)t^2]^2}.$$

Prenons encore

$$t = \alpha\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}:$$

la formule précédente devient

$$A = \frac{p^2}{(1+e)\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arc\,tg}\alpha + \frac{2p^2 e}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^2}.$$

Mais (21)

$$\int \frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\alpha + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1+\alpha^2};$$

donc, si l'on compte l'aire à partir de l'axe focal,

$$A = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\operatorname{arc\,tg}\alpha + \frac{e\alpha}{1+\alpha^2}\right]. \qquad (7)$$

Pour $\omega = \frac{\pi}{2}: \quad t = 1, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}};$

$$A = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} + \frac{1}{2}e\sqrt{1-e^2}\right].$$

Pour $\omega = \pi: \quad t = +\infty, \quad \alpha = +\infty;$

$$A = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\pi}{2}.$$

Cette dernière valeur doit égaler $\frac{\pi}{2}ab$. Effectivement,

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a};$$

donc

$$A = \frac{b^4}{a^2}\cdot\frac{a^3}{b^3}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}ab.$$

II. Si l'ellipse est rapportée à son centre,

$$u^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega};$$

$$A = \frac{1}{2}a^2b^2\int\frac{d\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}.$$

Nous avons trouvé (**62**), pour valeur de cette intégrale,

$$\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\omega\right);$$

donc

$$A = \frac{1}{2}ab\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\omega\right).$$

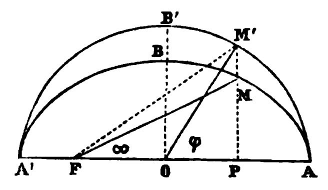
Si

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{b}{a},$$

$$A = \frac{1}{8}\pi ab;$$

en sorte que *le secteur considéré est le huitième de l'ellipse.* Des considérations géométriques fort simples permettent de vérifier ce résultat.

116. *Remarques.* — I. Il est facile d'abréger les calculs précédents. Sur le grand axe AA', comme diamètre, décrivons la demi-circonférence AB'A'; menons l'ordonnée PMM', le rayon vecteur F'M et le *rayon* OM'. Les coordonnées rectangulaires de M sont



$$OP = a\cos\varphi,\quad PM = b\sin\varphi\ (^*);$$

donc

$$F'P = ae + a\cos\varphi = u\cos\omega = \frac{a(1-e^2)\cos\omega}{1-e\cos\omega},$$

(*) L'angle φ est ce que l'on appelle, en Astronomie, *anomalie excentrique* : ω est l'*anomalie vraie*.

ou

$$e + \cos\varphi = \frac{(1 - e^2)\cos\omega}{1 - e\cos\omega}. \tag{8}$$

On tire, de cette équation :

$$\cos\omega = \frac{e + \cos\varphi}{1 + e\cos\varphi}, \quad \sin\omega = \sqrt{1 - e^2}\,\frac{\sin\varphi}{1 + e\cos\varphi},$$

$$1 - e\cos\omega = \frac{1 - e^2}{1 + e\cos\varphi}, \quad \sin\omega d\omega = \frac{(1 - e^2)\sin\varphi d\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2},$$

$$d\omega = \sqrt{1 - e^2}\,\frac{d\varphi}{1 + e\cos\varphi}.$$

La formule (6) devient

$$A = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1 - e^2}\int(1 + e\cos\varphi)\,d\varphi. \tag{9}$$

Si l'on compte les aires à partir de F'A, l'on a donc

$$A = aire\ F'MA = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1 - e^2}(\varphi + e\sin\varphi). \tag{10}$$

II. De simples considérations géométriques conduisent au même résultat. *Si l'on multiplie, par* $\frac{b}{a}$, *les ordonnées de tous les points du contour* F'M'A, on obtient F'MA. Ainsi

$$aire\ F'MA = aire\ F'M'A\,.\,\frac{b}{a} = aire\ F'MA\sqrt{1 - e^2}.$$

Or,

$$aire\ F'MA = aire\ F'M'O + aire\ OM'A = \frac{1}{2}ae\,.\,a\sin\varphi + \frac{1}{2}a^2\varphi;$$

etc.

III. De

$$\cos\omega = \frac{e + \cos\varphi}{1 + e\cos\varphi},$$

on tire

$$\frac{1 - \cos\omega}{1 + \cos\omega} = \frac{(1 - e)(1 - \cos\varphi)}{(1 + e)(1 + \cos\varphi)},$$

ou
$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi.$$

IV. Enfin, la même valeur de $\cos\omega$ donne, comme équation de l'ellipse,

$$u = a(1 + e\cos\varphi).$$

Exercices.

I. Quadrature de l'hyperbole rapportée à ses axes.

II. Quadrature de la logarithmique représentée par $y = ae^{-\frac{x}{a}}$. Quand x augmente indéfiniment, l'aire limitée par la courbe et les parties positives des axes tend-elle vers une limite?

III. Dans quel cas peut-on évaluer l'aire A de la courbe dont l'équation est

$$x^{2m} + y^{2m} = 1,$$

m étant un nombre entier? Vers quelle limite tend A, quand m augmente indéfiniment?

IV. Quadratures de la cissoïde et de la lemniscate.

V. Déduire, des propriétés de l'ellipse, les formules :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega} = \frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{\sqrt{AC-B^2}}\right].$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{A\sin^2\omega - 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega} = \frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{\sqrt{AC-B^2}}\right].$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

CHAPITRE XIII.

RECTIFICATION DES COURBES PLANES.

Coordonnées rectangulaires.

117. A cause de la formule

$$ds = dx\sqrt{1+y'^2},$$

on a

$$s = \int dx\sqrt{1+y'^2}.$$

Par conséquent, une rectification ne diffère pas essentiellement d'une quadrature : à une constante près, la longueur s égale l'aire de la courbe qui aurait pour équation

$$Y = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \ (^*).$$

Applications.

118. I. Soit $x^2 = 2py$ l'équation de la parabole. On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{p};$$

donc (**81**)

$$s = \int_0^x dx\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{x+\sqrt{p^2+x^2}}{p}.$$

Si l'on appelle A l'aire comprise *entre les axes,* une ordonnée, et l'hyperbole ayant pour équation

$$Y^2 = x^2 + p^2,$$

(*) On suppose, bien entendu, que les deux intégrales sont prises à partir d'une même valeur de x.

on trouve

$$A = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{1}{2} \mathrm{l} \frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p}.$$

Donc, conformément à la remarque précédente,

$$A = ps.$$

II. Prenons l'équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Il en résulte

$$dy = -\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}} dx,$$

puis

$$ds = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx;$$

et, par conséquent, en supposant $s = 0$ pour $x = 0$:

$$s = \frac{3}{2} (ax^2)^{\frac{1}{3}}.$$

La longueur d'un quadrans de la courbe est donc

$$\mathrm{l} = \frac{3}{2} a \text{ (*)}.$$

Coordonnées polaires.

119. On a vu, dans le *Calcul différentiel* (**189**), que l'élément ds est donné par l'équation

$$ds^2 = du^2 + u^2 d\omega^2.$$

Si donc, comme on le suppose ordinairement, ω est la variable indépendante, on aura

$$s = \int d\omega \sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\omega}\right)^2}. \qquad (1)$$

(*) Les formules de la page 507 conduisent au même résultat.

Applications.

120. I. On arrive à un résultat simple et remarquable si l'on prend *la spirale logarithmique,* représentée par

$$u = ae^{-\omega},$$

et si l'on cherche la longueur de *l'arc compris entre le pôle et le point situé à la distance* a *du pôle :* cet arc est composé d'*une infinité de spires* (*). Comme

$$\frac{du}{d\omega} = -ae^{-\omega},$$

la formule (1) devient

$$s = a\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\omega}d\omega;$$

ou, à cause de

$$\int e^{-\omega}d\omega = -e^{-\omega} + C:$$

$$s = a\sqrt{2}.$$

Ainsi, *l'arc* dont il s'agit *est équivalent à la diagonale du carré construit sur* a *comme côté* (**).

II. Soit encore la *spirale d'Archimède,* dont l'équation est

$$u = a\omega.$$

Il en résulte, si l'on prend u pour variable indépendante :

$$s = \int_0^u du\sqrt{1 + \frac{u^2}{a^2}}.$$

(*) En effet, le pôle est un *point asymptotique,* déterminé par $\omega = +\infty$.

(**) Si l'on cherche les longueurs des *spires* successives, on trouve qu'elles forment une progression par quotient, ayant pour premier terme $a\sqrt{2}(1 - e^{-2})$, et dont la raison est e^{-2}. Conséquemment, *la somme des longueurs des* n *premières spires a pour limite* $a\sqrt{2}$.

Cette intégrale ne diffère pas de celle qui donne la longueur l de la parabole ayant pour équation $x^2 = 2ay$ (**113**). Donc, en supposant $x = u$, on aura $l = s$. En d'autres termes :

Si l'on construit la spirale d'Archimède et la parabole respectivement représentées par

$$u = a\omega, \quad x^2 = 2ay\,;$$

que l'on prenne, sur la première courbe, un point quelconque M, *puis, sur la seconde, le point* M' *dont l'abscisse égale le rayon vecteur de* M ; *les arcs* OM, OM', *comptés à partir de l'origine, ont même longueur* (*).

Exercices.

I. Si, dans l'équation ordinaire de l'ellipse, on suppose

$$b = a\sqrt{1 - e^2}, \quad x = a\sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi,$$

on trouve que la longueur d'un quadrans de la courbe est

$$s = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}.$$

Développer en série cette *intégrale elliptique* (**).

II. Rectifications de la chaînette et de la cissoïde (***).

III. Théorème. — *Si l'on considère les courbes représentées par*

$$u = a\left(\cos\frac{2}{3}\omega\right)^{\frac{3}{2}}, \quad u = a(\cos 2\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

la longueur totale de la première est égale à six fois la différence entre l'arc infini de la seconde et son asymptote, l'origine commune étant sur l'axe polaire. (W. Roberts.)

(*) M. Mansion attribue cette remarque à Roberval.

(**) Voir ci-dessus (**58**).

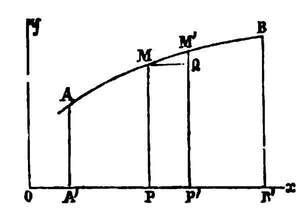
(***) Pages 486, 487.

CHAPITRE XIV.

VOLUMES ET AIRES DES CORPS DE RÉVOLUTION.

Volumes.

121. Soit $y=f(x)$ l'équation d'une courbe AB. Si l'on considère le corps engendré par la figure ABB'A' tournant autour de Ox, on peut prendre, pour élément, le volume du cylindre MPP'Q, c'est-à-dire $\pi y^2 dx$. En effet, MQQ' est infiniment petit par rapport à MPP'M'. La

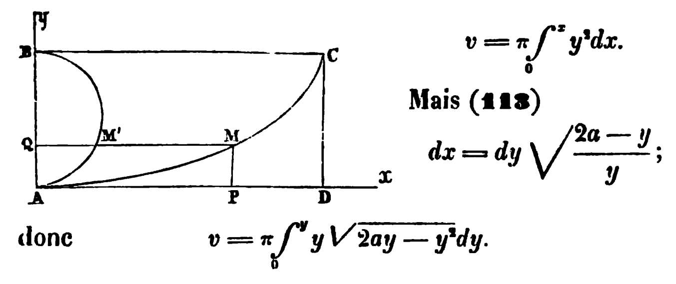


formule est donc

$$v=\pi\int_a^b y^2 dx.$$

Applications.

122. I. Le volume cycloïdal, engendré par AMP, serait



$$v=\pi\int_0^x y^2 dx.$$

Mais (**118**)

$$dx=dy\sqrt{\frac{2a-y}{y}};$$

donc
$$v=\pi\int_0^y y\sqrt{2ay-y^2}\,dy.$$

Pour intégrer, on remplace le facteur y par $a-(a-y)$; ce qui donne

$$v=a\pi\int_0^y dy\sqrt{2ay-y^2}-\pi\int_0^y (a-y)\,dy\sqrt{2ay-y^2}.$$

D'après l'un des théorèmes démontrés ci-dessus (**112**), la première intégrale égale *aire* AM'Q = *aire* AMP; l'autre est $\frac{1}{3}(2ay - y^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\overline{QM'}^3$; donc

$$v = a\pi . AM'Q - \frac{\pi}{3}\overline{QM'}^3.$$

Dans le cas de la demi-cycloïde tournant autour de Ax,

$$v = a\pi . \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{1}{2}\pi^2 a^3.$$

Cette expression représente *la moitié du volume du tore engendré par le demi-cercle* AB *tournant autour de* Ay.

II. Supposons que le demi-segment AQM tourne autour de Ay. En désignant par v_1 le nouveau volume, nous aurons

$$v_1 = \pi \int_0^y x^2 dy. \qquad (1)$$

L'intégration par parties change cette formule en

$$v_1 = \pi x^2 y - 2\pi \int_0^x xy dx = \pi x^2 y - v_2,$$

pourvu que l'on fasse

$$v_2 = 2\pi \int_0^x xy dx. \qquad (2)$$

D'ailleurs, $\pi x^2 y$ est le volume du cylindre engendré par APQM; donc

$$v_2 = vol . APM.$$

A cause de $dx = dy\sqrt{\frac{2a-y}{y}}$,

$$v_2 = 2\pi \int_0^y x\sqrt{2ay - y^2}dy.$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_0^x x\sqrt{2ay - y^2}dy = x . AQM' - \int_0^x AQM'dx.$$

Le demi-segment circulaire AQM′ a pour mesure

$$\frac{1}{2}a^2 \arccos\frac{a-y}{a} - \frac{1}{2}(a-y)\sqrt{2ay-y^2};$$

donc

$$v_2 = \pi\Big[a^2x \,.\arccos\frac{a-y}{a} - x(a-y)\sqrt{2ay-y^2}$$
$$- a^2\int_0^x dx \arccos\frac{a-y}{a} + \int_0^x (a-y)\,dx\sqrt{2ay-y^2}\Big].$$

Posons $\arccos\frac{a-y}{a} = 2\theta$. Il résulte, de cette transformation :

$$y = 2a\sin^2\theta, \quad dy = 4a\sin\theta\cos\theta d\theta,$$
$$2a - y = 2a\cos^2\theta, \quad dx = 2a(1+\cos 2\theta)\,d\theta,$$

$$\int_0^x dx \arccos\frac{a-y}{a} = 4a\int_0^\theta (1+\cos 2\theta)\,.\theta d\theta$$
$$= a(2\theta^2 + 2\theta\sin 2\theta + \cos 2\theta - 1),$$
$$\int_0^x (a-y)\,dx\sqrt{2ay-y^2} = 2a^3\int_0^\theta (1+\cos 2\theta)\cos 2\theta\sin 2\theta d\theta$$
$$= a^3\left[\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\cos^2 2\theta - \frac{1}{3}\cos^3 2\theta\right];$$

puis

$$\left.\begin{aligned} v_2 = \pi\Big[&a^2x\arccos\frac{a-y}{a} - x(a-y)\sqrt{2ay-y^2} \\ &- a^3(2\theta^2 + 2\theta\sin 2\theta + \cos 2\theta - 1) \\ &+ \frac{1}{6}a^3(5 - 3\cos^2 2\theta - 2\cos^3 2\theta)\Big]. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Si le point M coïncide avec C :

$$y = 2a, \quad x = \pi a, \quad \theta = \frac{\pi}{2};$$

donc $$v_2 = vol\,\text{ACD} = \pi a^3\left(\frac{8}{3} + \frac{\pi^2}{2}\right); \quad (4)$$

et $$v_1 = vol\,\text{ACB} = \pi a^3\left(\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3}\right). \quad (5)$$

123. *Remarque.* — En fonction de la variable θ, les équations du point M sont, comme on le reconnaît aisément :

$$x = a\,(2\theta + \sin 2\theta), \quad y = a\,(1 - \cos 2\theta);$$

ou, si l'on remplace 2θ par φ :

$$x = a\,(\varphi + \sin \varphi), \quad y = a\,(1 - \cos \varphi).$$

Par conséquent,

$$v_1 = \pi \int_0^y x^2 dv = \pi a^3 \int_0^\varphi (\varphi + \sin \varphi)^2 \sin \varphi\, d\varphi. \qquad (6)$$

On a

$$(\varphi + \sin \varphi)^2 \sin \varphi = \varphi^2 \sin \varphi + \varphi\,(1 - \cos 2\varphi) + \frac{1}{4}\,(3 \sin \varphi - \sin 3\varphi);$$

donc

$$\int (\varphi + \sin \varphi)^2 \sin \varphi\, d\varphi = \varphi^2 \left(\frac{1}{2} - \cos \varphi\right) + \varphi \left(2 \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right)$$
$$+ \frac{1}{4}\left(3 \cos \varphi - \cos 2\varphi + \frac{1}{3} \cos 3\varphi\right) + \text{C},$$

et

$$\int_0^\varphi (\varphi + \sin \varphi)^2 \sin \varphi\, d\varphi = \varphi^2 \left(\frac{1}{2} - \cos \varphi\right) + \varphi \left(2 \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi\right)$$
$$+ \frac{1}{4}\left(3 \cos \varphi - \cos 2\varphi + \frac{1}{3} \cos 3\varphi - \frac{13}{3}\right).$$

Quand il s'agit de la demi-cycloïde tournant autour de Oy, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$: l'intégrale précédente se réduit à $\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3}$; et la formule (6) devient

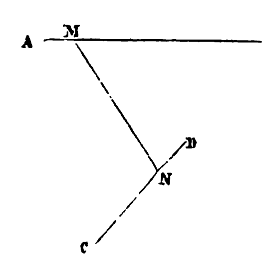
$$v_1 = \pi a^3 \left(\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3}\right);$$

comme précédemment (*).

(*) Ce calcul, plus simple que le premier, montre, une fois de plus, combien le choix des transformations est important.

Extension de la méthode.

194. Le volume d'un corps de révolution a pu être déterminé par une seule intégration, parce que les sections parallèles sont des cercles, dont les aires sont immédiatement connues. Le même procédé réussit toutes les fois que le corps considéré admet des sections parallèles semblables et simples, telles que des cercles, des ellipses, etc. Considérons, par exemple, la surface engendrée par une droite MN, de longueur donnée, glissant sur deux droites AB, CD, non situées dans un même plan. En supposant, pour plus de simplicité, que ces directrices soient rectangulaires, on trouve aisément l'équation



$$\frac{x^2}{(c+z)^2} + \frac{y^2}{(c-z)^2} = \mathrm{tg}^2\,\gamma,$$

γ étant l'angle de la génératrice avec l'axe des z (*).

On peut prendre, pour élément du volume, un cylindre ayant pour hauteur dz. Les demi-axes de la base sont

$$(c+z)\,\mathrm{tg}\,\gamma, \quad (c-z)\,\mathrm{tg}\,\gamma;$$

donc

$$v = 2\pi\,\mathrm{tg}^2\,\gamma \int_0^c (c^2 - z^2)\,dz = \frac{4}{3}\pi c^3\,\mathrm{tg}^2\,\gamma.$$

(*) Sur le plan des xy, la droite MN se projette suivant une droite mn, *dont la longueur l est constante*, et qui s'appuie sur les deux axes. De là résulte que *le contour apparent de la surface*, relatif au plan considéré, a pour projection la courbe représentée par

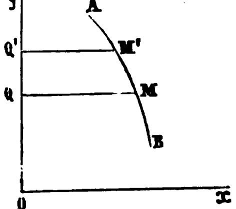
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}},$$

courbe dont il a été question plusieurs fois.

La section par le plan de xy est un cercle dont le rayon égale c tg γ; donc *le corps considéré est les $\frac{2}{3}$ du cylindre de même base et de même hauteur ;* et, *si $\gamma = \frac{\pi}{4}$, le même corps est équivalent à la sphère dont le rayon serait* c.

Aires des surfaces de révolution.

125. Si la courbe plane AB tourne autour de Oy, elle engendre une surface de révolution, dont l'élément peut être supposé confondu avec la surface conique décrite par la corde $MM' = ds$. Ainsi



$$dA = 2\pi\left(x + \frac{1}{2}dx\right)ds;$$

ou, en négligeant une quantité du deuxième ordre :

$$dA = 2\pi x ds;$$

puis

$$A = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} x ds.$$

Application à l'ellipsoïde de révolution.

126. Soit

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\gamma^2} = 1,$$

γ étant supérieur à α. On a

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\gamma^2 x}{\alpha^2 y}, \quad 1 + y'^2 = \frac{\alpha^4 + (\gamma^2 - \alpha^2)x^2}{\alpha^2(\alpha^2 - x^2)},$$

$$ds = \frac{1}{\alpha}dx\sqrt{\frac{\alpha^4 + (\gamma^2 - \alpha^2)x^2}{\alpha^2 - x^2}};$$

$$A = 2\frac{\pi}{\alpha}\int_0^\alpha xdx\sqrt{\frac{\alpha^4 + (\gamma^2 - \alpha^2)x^2}{\alpha^2 - x^2}}.$$

On simplifie cette formule en prenant y pour variable. En effet,

$$\alpha^2 - x^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma^2} y^2, \quad x dx = -\frac{\alpha^2}{\gamma^2} y dy,$$

$$\alpha^4 + (\gamma^2 - \alpha^2)x^2 = \alpha^4 + (\gamma^2 - \alpha^2)\alpha^2\left(1 - \frac{y^2}{\gamma^2}\right) = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\left[\gamma^4 - (\gamma^2 - \alpha^2)y^2\right];$$

donc

$$A = 2\pi \frac{\alpha\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}{\gamma^2} \int_0^\gamma dy \sqrt{\frac{\gamma^4}{\gamma^2 - \alpha^2} - y^2}.$$

L'intégrale indéfinie est (**85**)

$$\frac{1}{2} y \sqrt{\frac{\gamma^4}{\gamma^2 - \alpha^2} - y^2} + \frac{1}{2}\frac{\gamma^4}{\gamma^2 - \alpha^2} \text{arc sin} \frac{y\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}{\gamma^2};$$

conséquemment,

$$\int_0^\gamma dy \sqrt{\frac{\gamma^4}{\gamma^2 - \alpha^2} - y^2} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}} + \frac{1}{2}\frac{\gamma^4}{\gamma^2 - \alpha^2} \text{arc sin} \frac{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}{\gamma};$$

puis

$$A = \pi\alpha^2 + \pi \frac{\alpha\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}} \text{arc sin} \frac{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}{\gamma}. \tag{9}$$

127. *Remarques.* — I. Comme on a supposé $\gamma > \alpha$, $y > 0$, A représente *la moitié de l'aire de l'ellipsoïde de révolution, allongé.*

II. Si α devient égal à γ, le second terme prend la forme $\frac{0}{0}$. Mais

$$\mathit{lim} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}} \text{arc sin} \frac{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}{\gamma} = 1;$$

donc

$$A = 2\pi\alpha^2.$$

En effet, l'aire de la sphère est $4\pi\alpha^2$.

Exercices.

I. Calculer le volume de l'ellipsoïde *de révolution* représenté par

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2.$$

II. On donne le *folium* qui a pour équation

$$y^2 = x^2 \frac{a - x}{a + x},$$

et l'on propose de déterminer :

1° Le volume de la *lentille* engendrée par la *demi-boucle*, tournant autour de l'axe des abscisses;

2° Le volume de l'*anneau* engendré par la boucle entière, tournant autour de l'axe des ordonnées;

3° Le volume du corps terminé par la surface que décrit la branche indéfinie, tournant autour de son asymptote.

III. Trouver le volume de la partie commune au cylindre qui a pour équation $x^2 + y^2 = a^2$, et au corps limité par la surface dont l'équation est $z = \mathrm{l}(1 + x^2 + y^2)$.

IV. Aire de l'hyperboloïde de révolution, à une nappe ou à deux nappes.

V. Aire et volume du paraboloïde de révolution.

VI. Le segment paraboloïdique, déterminé par

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z, \quad z = h,$$

est la moitié du cylindre de même base et de même hauteur.

VII. Calculer le volume du cône de révolution, en le décomposant en *tranches* parallèles à un plan méridien (*).

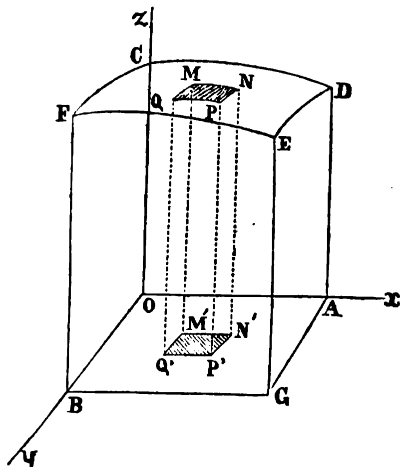
(*) Ce procédé conduit à la relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos\theta d\theta \,.\, \mathrm{l}\left(\cot\frac{1}{2}\theta\right) = \frac{\pi}{12}.$$

CHAPITRE XV.

VOLUMES QUELCONQUES.

128. Soit d'abord un corps terminé par une surface donnée CDEF, par les plans coordonnés, et par deux plans ADEG, BGEF, respectivement parallèles à yz et xz. On prend, pour élément du volume, le petit parallélipipède MNPQM'N'P'Q' ayant pour base $dxdy$, et dans lequel $MM' = z$; en sorte que



$$dv = zdxdy.$$

Si on laisse x constant, et que l'on fasse varier y, de 0 à $OB = b$, on aura le volume d'une *tranche* parallèle au plan yz : ce volume est $dx\int_0^b zdy$. Comme $z = f(x, y)$, le résultat est de la forme $\varphi(x)\,dx$. Il faut ensuite faire la somme de toutes les tranches, c'est-à-dire intégrer

$$\varphi(x)\,dx = dx\int_0^b zdy,$$

de $x = 0$ à $x = a$. On a donc

$$v = \int_0^a dx\int_0^b zdy;$$

en sorte que le volume v est donné par une *intégrale double*.

179. Considérons, en second lieu, un corps limité par une surface donnée; et, pour plus de simplicité, supposons-la convexe. L'élément du volume sera $(z_1 - z_2)\,dxdy$; d'où résulte

$$v = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (z_1 - z_2)\,dy. \qquad (1)$$

Dans cette formule :

1° z_1, z_2 sont les deux valeurs réelles de z, tirées de $F(x, y, z) = 0$, équation de la surface donnée;

2° y_1, y_2 sont la plus petite et la plus grande valeur de y qui répondent à une même valeur de x, dans l'équation $\varphi(x, y) = 0$ du cylindre circonscrit à la surface (p. 544);

3° x_1, x_2 sont le minimum et le maximum de x, tirés de cette dernière équation : *ces limites sont des constantes.*

Applications.

180. I. Soit la sphère représentée par

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2;$$

et, pour fixer les idées, admettons qu'elle soit située dans l'angle des coordonnées positives.

On a

$$z = c \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2};$$

donc, par la formule (1),

$$v = 2\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}.$$

Le cylindre circonscrit, parallèle à l'axe des z, a pour équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2;$$

ainsi

$$y_1 = b - \sqrt{R^2 - (x-a)^2}, \quad y_2 = b + \sqrt{R^2 - (x-a)^2}.$$

De plus,

$$x_1 = a - \mathrm{R}, \quad x_2 = a + \mathrm{R}.$$

Soient, pour un instant,

$$\mathrm{R}^2 - (x-a)^2 = \rho^2, \quad y - b = \mathrm{Y}:$$

l'intégrale relative à y est

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{Y}\sqrt{\rho^2 - \mathrm{Y}^2} + \frac{1}{2}\rho^2 \operatorname{arc\,sin}\frac{\mathrm{Y}}{\rho}\\
&= \frac{1}{2}(y-b)\sqrt{\mathrm{R}^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}\\
&+ \frac{1}{2}\left[\mathrm{R}^2 - (x-a)^2\right]\operatorname{arc\,sin}\frac{y-b}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - (x-a)^2}}.
\end{aligned}$$

Le premier terme s'annule pour $y = y_1$ et pour $y = y_2$; le second devient

$$\mp \frac{1}{2}\left[\mathrm{R}^2 - (x-a)^2\right]\frac{\pi}{2};$$

donc, par soustraction,

$$\int_{y_1}^{y_2} z\,dy = \frac{\pi}{2}\left[\mathrm{R}^2 - (x-a)^2\right];$$

puis

$$v = \pi\int_{x_1}^{x_2}\left[\mathrm{R}^2 - (x-a)^2\right]dx.$$

L'intégrale indéfinie est

$$\mathrm{R}^2 x - \frac{1}{3}(x-a)^3 + \mathrm{C};$$

conséquemment

$$v = \pi\left[\mathrm{R}^2(a+\mathrm{R}) - \mathrm{R}^2(a-\mathrm{R}) - \frac{1}{3}\mathrm{R}^3 - \frac{1}{3}\mathrm{R}^3\right] = \pi\mathrm{R}^3.$$

II. $$z = \pm\frac{x}{c}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

La surface est symétrique par rapport à tous les plans coordonnés; ainsi, l'on peut prendre

$$v = \frac{8}{c}\int_0^a x dx \int_0^{y_1} dy \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

en supposant

$$y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

La première intégrale a pour valeur

$$\left[\frac{1}{2} y \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right]_0^{y_1},$$

ou

$$\frac{\pi}{4}(a^2 - x^2).$$

Donc

$$v = \frac{2\pi}{c}\int_0^a (a^2 - x^2)\, x dx = \frac{\pi a^4}{2c} \text{ (*)}.$$

Exercices.

I. Volume commun au paraboloïde et au cylindre dont les équations sont

$$y^2 + z^2 = 4ax, \quad x^2 + y^2 = 2ax.$$

II. Même question, les équations étant

$$y^2 + z^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = 2ax.$$

III. Trouver le volume de l'hyperboloïde à une nappe, limité par deux plans parallèles au plan de l'ellipse de gorge.

IV. On donne, dans le plan zx, un quart de circonfé-

(*) La remarque faite ci-dessus (194) permet d'arriver à ce résultat au moyen d'une intégrale simple. En effet, les sections faites dans la surface, parallèlement au plan yz, sont des ellipses.

rence, qui a pour centre l'origine O, dont le rayon est R, et dont les extrémités sont sur les axes Ox, Oz. Une circonférence égale à la première, et située dans un plan parallèle au plan des xy, se meut de manière que son centre décrit le quadrans donné. Calculer le volume limité par les trois plans coordonnés et par la surface qu'engendre la circonférence mobile.

V. Volume d'un *onglet* cylindrique, déterminé par

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = x \operatorname{tg} \gamma.$$

CHAPITRE XVI.

AIRES DES SURFACES QUELCONQUES.

181. En remontant aux principes exposés en Géométrie, on est conduit à prendre, comme élément de la surface, un parallélogramme infiniment petit, situé dans le plan tangent, et dont la projection, sur le plan des xy, a pour mesure $dxdy$. Conséquemment, $dA = \frac{dxdy}{\cos \nu}$, ν étant l'angle de la normale avec Oz. On a trouvé (p. 543)

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

ainsi

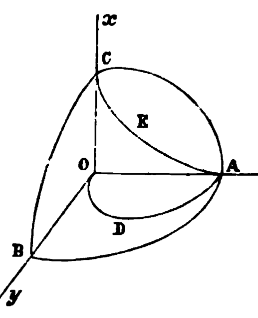
$$A = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} dxdy \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Relativement aux limites, les règles à observer sont les mêmes que pour la détermination d'un volume (**129**). Ajoutons, pour compléter l'analogie, que A est le volume limité par la surface dont l'équation serait

$$Z = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Application.

132. *Mesurer la partie* AEC *de la surface d'une sphère, intérieure au cylindre de révolution dont une génératrice* OC *passe par le centre* O, *et dont la base* OAD *a pour diamètre le rayon de la sphère* (*).



Les équations des deux surfaces sont

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad (1)$$

$$y^2 = x(a - x). \qquad (2)$$

On tire, de l'équation (1) :

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z};$$

donc

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}};$$

$$A = a\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}. \qquad (3)$$

Les limites sont

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \sqrt{x(a - x)}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = a.$$

L'intégrale indéfinie, relative à y, est

$$\text{arc sin} \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

(*) Ce problème est connu sous le nom de *la Fenêtre de Viviani*.

conséquemment

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}};$$

puis

$$A = a\int_0^a dx \,.\, \arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}}. \tag{4}$$

Soit

$$\arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = \theta.$$

Cette transformation donne

$$\frac{x}{a+x} = \sin^2\theta, \quad x = a\,\mathrm{tg}^2\theta, \quad dx = 2a\,\mathrm{tg}\,\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

$$A = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\,\mathrm{tg}\,\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta}. \tag{5}$$

On a

$$\int \theta\,\mathrm{tg}\,\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{2}\theta\,\mathrm{tg}^2\theta - \frac{1}{2}\int \mathrm{tg}^2\theta d\theta;$$

$$\int \mathrm{tg}^2\theta d\theta = \int \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \mathrm{tg}\,\theta - \theta;$$

puis

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\,\mathrm{tg}\,\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2};$$

et enfin

$$A = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2.$$

138. *Autre méthode.* — Si l'on fait $x = u\cos\omega$, $y = u\sin\omega$ (**108**) :

$$dxdy = ududω.$$

De plus, l'équation de la circonférence ODA étant $u = a\cos\omega$, les limites sont

$$u_1 = 0, \quad u_2 = a\cos\omega, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{\pi}{2}.$$

La formule (3) devient donc

$$A = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{a\cos\omega} \frac{u\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}}.$$

L'intégrale relative à x est $\left[-\sqrt{a^2-u^2}\right]_0^{a\cos\omega} = a - a\sin\omega$; en sorte que

$$A = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\omega)\,d\omega,$$

ou

$$A = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right);$$

comme ci-dessus.

184. *Remarque.* — Le triangle sphérique ABC a pour mesure $\frac{\pi a^2}{2}$; donc $AECB = a^2$. Ainsi, *le triangle curviligne* AECB *est équivalent au carré du rayon de la sphère*. Le volume de ADOCBAE a également une expression fort simple : il est les $\frac{2}{9}$ de a^3 (*).

Aire de l'ellipsoïde.

185. Soit
$$\left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z'}{\gamma}\right)^2 = 1$$

l'équation de la surface. On en tire

$$p = \frac{dz'}{dx'} = -\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{x'}{z'}, \quad q = -\frac{\gamma^2}{\beta^2}\frac{y'}{z'}.$$

(*) Ce résultat curieux a été trouvé par l'abbé Bossut (né en 1730, mort en 1814).

Donc, A' étant le huitième de l'aire cherchée,

$$A' = \iint dx'dy' \sqrt{\frac{1 - \left(1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)\frac{x'^2}{\alpha^2} - \left(1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\frac{y'^2}{\beta^2}}{1 - \frac{x'^2}{\alpha^2} - \frac{y'^2}{\beta^2}}}.$$

L'intégrale doit être étendue à toutes les valeurs positives de x' et de y', satisfaisant à la relation

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} \overline{\overline{<}} 1.$$

Si l'on fait

$$\frac{x'}{\alpha} = x, \quad \frac{y'}{\beta} = y, \quad 1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = a^2, \quad 1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2} = b^2, \quad A' = \alpha\beta A,$$

on trouve

$$\left.\begin{aligned} A = \iint dxdy \sqrt{\frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2}{1 - x^2 - y^2}}, \\ x^2 + y^2 \overline{\overline{<}} 1. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Désignons par z la valeur positive du radical; alors l'intégrale A devient $\iint zdxdy$: elle peut être considérée (**128**) comme représentant le volume de la partie du cylindre dont l'équation est $x^2 + y^2 = 1$, comprise entre les plans coordonnés et la surface S représentée par

$$z^2 = \frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2}{1 - x^2 - y^2},$$

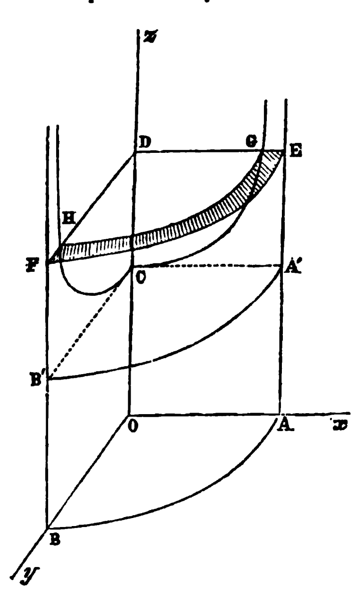
ou, plus simplement, par

$$(z^2 - a^2)x^2 + (z^2 - b^2)y^2 = z^2 - 1. \quad (7)$$

En supposant $\alpha > \beta > \gamma$, on a $1 > a^2 > b^2$. Donc les sections faites dans la surface, par des plans parallèles aux xy,

sont des ellipses GDH : les limites sont un point, répondant à $z=1$, et le cercle représenté par $x^2+y^2=1$.

Une première partie du volume est celui du cylindre droit AOBA'CB', ayant pour hauteur $OC=1$; savoir, $\frac{1}{4}\pi$. Nous pouvons prendre, comme élément de la seconde partie, le volume d'un cylindre ayant pour hauteur dz, et dont la base serait la *couronne* HGEF, comprise entre le cercle EF et l'ellipse GH. Les demi-axes de cette ellipse sont, d'après l'équation (7) :



$$DG=\sqrt{\frac{z^2-1}{z^2-a^2}},$$

$$DH=\sqrt{\frac{z^2-1}{z^2-b^2}}.$$

Conséquemment, le cylindre élémentaire dont il s'agit a pour mesure

$$\frac{1}{4}\pi\left[1-\frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}\right]dz,$$

et la formule (6) devient

$$A=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{4}\pi\int_1^\infty\left[1-\frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}\right]. \qquad (8)$$

136. Soit

$$I=\int_1^\infty\left[1-\frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}\right]dz.$$

On peut, de différentes manières, simplifier cette intégrale. Voici celle qui a été proposée par M. Ghysens (*).

En désignant par R le radical, on a, identiquement,

$$d.\frac{R}{z}=\frac{z^2dz}{R}-a^2b^2\frac{dz}{z^2R};$$

donc

$$\int\frac{z^2dz}{R}=\frac{R}{z}+a^2b^2\int\frac{dz}{z^2R};$$

puis

$$\int\left(1-\frac{z^2-1}{R}\right)dz=z+\int\frac{dz}{R}-\frac{R}{z}-a^2b^2\int\frac{dz}{z^2R};$$

et, par conséquent,

$$I=\left[z-\frac{R}{z}\right]_1^\infty+\int_1^\infty\frac{dz}{R}-a^2b^2\int_1^\infty\frac{dz}{z^2R}. \qquad (9)$$

La quantité entre parenthèses semble indéterminée pour $z=\infty$; mais, si on l'écrit ainsi :

$$\frac{z^4-(z^2-a^2)(z^2-b^2)}{z[z^2+R]}=\frac{(a^2+b^2)z^2-a^2b^2}{z(z^2+R)},$$

on voit que la limite cherchée est zéro. La formule (9) devient donc

$$I=-1+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+\int_1^\infty\frac{dz}{R}-a^2b^2\int_1^\infty\frac{dz}{z^2R};$$

et la formule (8) :

$$\frac{4A}{\pi}=\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$$

$$+\int_1^\infty\frac{dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}-a^2b^2\int_1^\infty\frac{dz}{z^2\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}. \qquad (10)$$

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. III, p. 42. Émile Ghysens, Répétiteur d'Analyse, à l'École des Mines (Liége), vient de mourir à l'âge de trente ans. Ce jeune homme, déjà connu par quelques travaux intéressants, donnait de grandes espérances.

La détermination de l'aire de l'ellipsoïde est ainsi réduite aux *quadratures*. Quant aux intégrales contenues dans la formule (10), elles dépendent des *fonctions elliptiques*.

127. *Ellipsoïde de révolution.* — Si $a=b$, la formule (8) devient

$$\frac{4}{\pi}A = 1 + (1-a^2)\int_1^\infty \frac{dz}{z^2-a^2} = 1 + \frac{(1-a^2)}{2a}\int_1^\infty \left(\frac{dz}{z-a} - \frac{dz}{z+a}\right),$$

ou

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\,\frac{1-a^2}{a}\,\mathrm{l}\,\frac{1-a}{1+a}.$$

Et comme

$$a = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}:$$

$$8A' = 2\pi\alpha^2 + \pi\,\frac{\alpha\gamma^2}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}\,\mathrm{l}\,\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}. \qquad (11)$$

Telle est l'expression de l'aire de l'*ellipsoïde de révolution, aplati* (*).

Exercices.

I. Appliquer, à l'hyperboloïde gauche, la méthode précédente (**125**) : on suppose que la surface est limitée par deux plans parallèles au plan de l'ellipse de gorge.

II. Calculer l'aire du paraboloïde dont l'équation est $z=xy$, en supposant

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

(*) On a vu, ci-dessus (**126**), le cas de l'*ellipsoïde de révolution, allongé*. Au fond, les deux formules sont identiques : comme on l'a vu dans un cas analogue à celui-ci (**14**), on passe aisément de l'une à l'autre.

III. Évaluer le volume de l'ellipsoïde au moyen des variables u, v liées à x, y par les équations

$$\frac{x^2}{a^2-u^2}+\frac{y^2}{b^2-u^2}=1,\qquad \frac{x^2}{a^2-v^2}+\frac{y^2}{b^2-v^2}=1.$$

IV. Théorème. — *Soient* R, θ, φ *la distance de l'origine au plan tangent en un point d'une surface, et les angles qui déterminent la position de cette droite. Si l'on fait, pour abréger,*

$$L=R\sin\theta+\frac{dR}{d\theta}\cos\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{d^2R}{d\varphi^2},$$

$$M=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dR}{d\varphi}-\frac{d^2R}{d\theta d\varphi},$$

$$N=R+\frac{d^2R}{d\theta^2},$$

l'aire de la surface est donnée par la formule

$$A=\iint\left(LN-\frac{M^2}{\sin\theta}\right)d\theta d\varphi.$$

(W. Roberts.)

V. Calculer l'aire de la surface ayant pour équation

$$z=\arcsin\frac{(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})}{4}.$$

VI. Démontrer l'*identité*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2n}x+\cos^{2n-2}x\cos^2y+\ldots+\cos^2x\cos^{2n-2}y+\cos^{2n}y)\,dxdy$$
$$=\frac{\pi^2}{4}.$$

VII. Prouver que

$$\int_0^a dx\int_0^b\frac{dy}{(c^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{c}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

VIII. Prouver que

$$\iint dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right),$$

l'intégrale étant étendue à tous les points de la surface représentée par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

IX. Vérifier que

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{(x+y)^{2q}-(x-y)^{2q}}{(e^{2\pi x}-1)(e^{2\pi y}-1)}dxdy=\frac{2q+3}{2q+1}\int_0^\infty\frac{\alpha^{2q+1}d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}.$$

X. Démontrer la formule

$$\iint\frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^2-2(a^2-b^2)(x^2-y^2)+(a^2-b^2)^2}}$$
$$=\pi\,\mathrm{l}\frac{a+b}{a-b},$$

l'intégrale s'étendant à toutes les valeurs de x et de y qui vérifient la relation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\overline{\gtrless}1.$$

ERRATA.

Page 34, ligne 13. Au lieu de : *la série est,* lisez : *la série*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

est

Page 35, ligne 10. *Au lieu de :* $\frac{3x^3}{1-3^3}$, *lisez :* $\frac{3x^3}{1-x^3}$.

— 156, — 5 (en remontant). *Au lieu de :* $\frac{1+x}{1+x}$, *lisez :* $\frac{1+x}{1-x}$.

— 171, — 6. *Au lieu de :* $46^2 + 17^2$, *lisez :* $92^2 + 34^2$.

— 179, — 8. — $\varphi(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, *lisez*

$\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$.

— 188, — 15. *Au lieu de :* $\sin_{m-1}$, *lisez :* $\sin\omega_{m-1}$.

— — — 16. — $-A$, *lisez :* $-A_m$.

— 190, — 7 (en remontant). *Au lieu de :* $B\beta\sqrt{-0}$, *lisez :* $B\beta\sqrt{-1} = 0$.

— 202, — 9 — — 21 528, *lisez :* 23 328.

— 284, — 16. *Au lieu de :* $\frac{2\pi m}{m}$, *lisez :* $\frac{2k\pi}{m}$.

— 336, — 8 (en remontant). *Au lieu de :* $f_1(x)$, *lisez :* $\varphi(x)$.

— 351, — 5. *Au lieu de :* $\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{ON}}$ tg ONP, *lisez :* $\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{ON}} = \mathrm{tg}\,\mathrm{ONP}$.

— 363, — 3. — 228, *lisez :* 288.

— 374, lignes 7 et 17. *Au lieu de :* $\arccos x$, *lisez :* $\frac{1}{2}\arccos x$.

— 395. Les paragraphes 5° et 6° doivent être rétablis ainsi :

5° Soient $a = 0$, $b > 0$. Les formules (16) donnent $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Conséquemment,

$$\lambda(b\sqrt{-1}) = 1(b) + (2k + \tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1}. \qquad (22)$$

6° En particulier,

$$\lambda(\sqrt{-1}) = (2k + \tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1}. \qquad (23)$$

Page 476, ligne avant-dernière. *Au lieu de :* de, *lisez :* du.

— 484, — 9. *Au lieu de :* $n \cos \theta u + \mathrm{FN} \cos \omega$, *lisez :* $n \cos \theta = u - \mathrm{FN} \cos \omega$.

— — — 13. — $\cos^2 \theta$, *lisez :* $\cos^3 \theta$.

— 517, — 13. — $\sqrt{a}$, *lisez :* $\sqrt{x}$.

— 535, — 4. — $\frac{n}{1}$, *lisez :* $\frac{n}{\frac{1}{2}}$.

— 565, — 5. — $\frac{1}{x^2+1}$, *lisez :* $\frac{x}{x^2+1}$.

— 568, — 7 (en remontant). *Au lieu de :* renferne, *lisez :* renferme.

— 589, — 8. *Au lieu de :* $\sin^{p+1}$, *lisez :* $\sin^{p+1} x$.

— 596, — anté-pénultième. *Au lieu de :* y^n, *lisez :* y_n.

— 629, — 2. *Au lieu de :* $x_2 - x_2$, *lisez :* $x_2 - x_1$.

— 630, — 12. — $(a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega)$, *lisez :* $(a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega) d\omega$.

— 646, — 8. — $x^2 dv$, *lisez :* $x^2 dy$.

TABLE DES MATIÈRES.

ALGÈBRE.

I.

SÉRIES ET LOGARITHMES.

II.

DÉRIVÉES.

III.

IMAGINAIRES.

IV.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

I.

INFINIMENT PETITS ET DIFFÉRENTIELLES.

II.

RÈGLES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

III.

APPLICATIONS ANALYTIQUES.

IV.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CALCUL INTÉGRAL.

I.

INTÉGRALES SIMPLES.

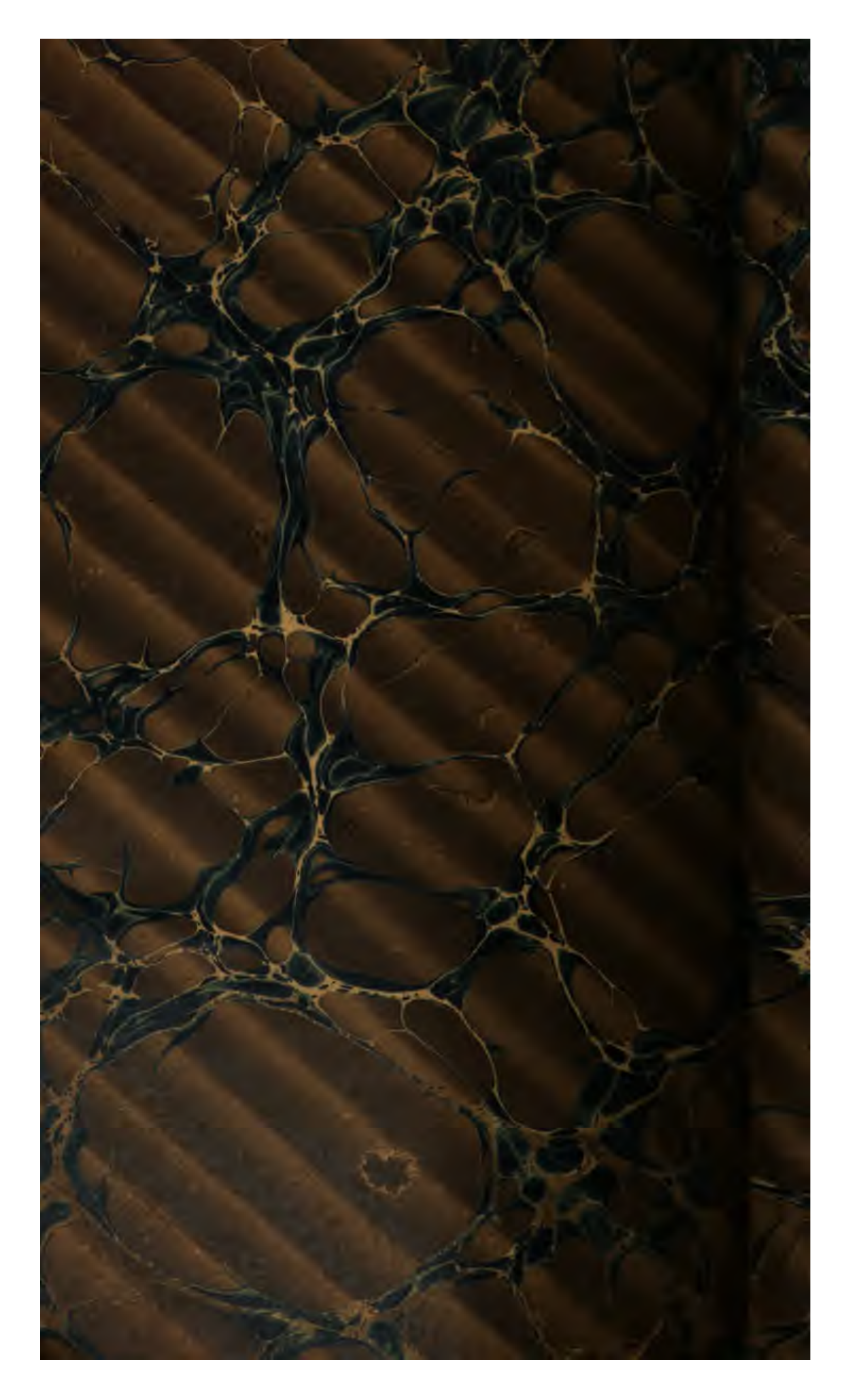
II.

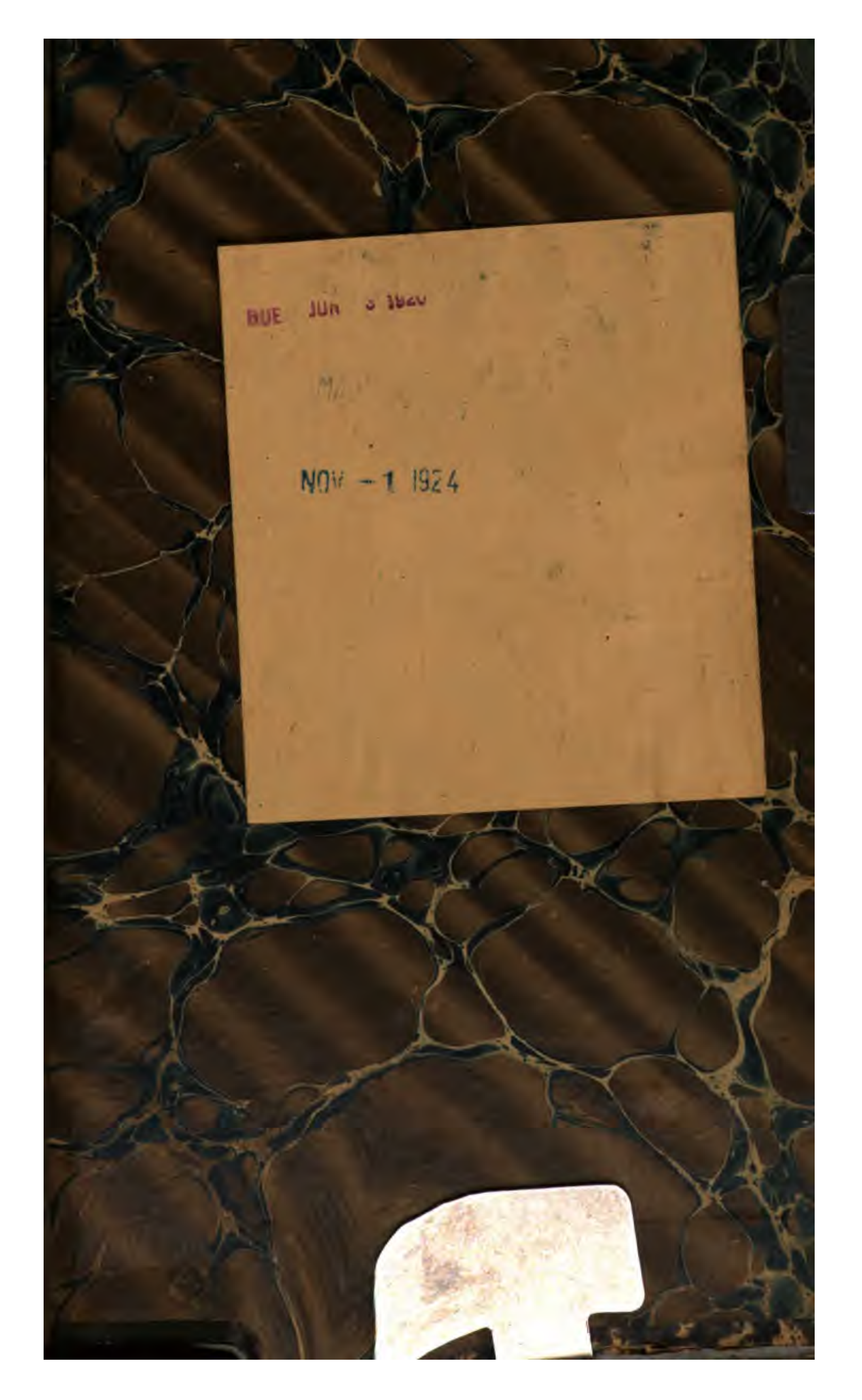
INTÉGRALES MULTIPLES.

III.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

FIN.




DUE JUN
NOV -1 1924